

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ВЫСШИЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

Н. В. Михайлова

**СИСТЕМНЫЙ СИНТЕЗ
ПРОГРАММ ОБОСНОВАНИЯ
СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ**

МОНОГРАФИЯ

МИНСК 2008

УДК 510.21
ББК 87+22.1
М69

Рекомендовано к изданию Советом Учреждения образования «Минский государственный высший радиотехнический колледж»
(протокол № 3 от 26.03.2008 г.)

Р е ц е н з е н т ы:

П. С. Карako, доктор философских наук, профессор,
профессор кафедры философии и методологии науки
Белорусского государственного университета,
В. П. Старжинский, доктор философских наук, профессор,
профессор кафедры философских учений
Белорусского национального технического университета
Л. А. Янович, доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент НАН Беларуси,
г.н.с. Института математики НАН Беларуси

Михайлова Н. В.

М69

**Системный синтез программ обоснования современной математики:
Монография. – Мн.: МГВРК, 2008. – 245 с.**

ISBN 978-985-6851-53-0

Монография посвящена актуальной проблеме философии математики – философско-методологическому обоснованию современной математики. Предлагаемый в монографии целостный подход к имеющимся программам обоснования математики позволяет объяснить то, что нельзя вывести исходя лишь из внешних признаков по отношению к исследуемой проблеме. В работе показано, что стремление к целостности неразрывно связано с идеей триадичности, которая позволяет в проблеме обоснования замкнуть известную бинарную оппозицию “формализм – интуиционизм” в системную триаду, объединяющую три методологически равноправных элемента “формализм – платонизм – интуиционизм”. В концептуальном развитии проблемы обоснования математики используются идеи, содержащиеся в общефилософской процедуре системного синтеза.

Адресуется студентам, магистрантам и аспирантам философских, математических и инженерных специальностей, а также преподавателям философских и математических дисциплин и всем тем, кто интересуется философскими проблемами математики.

**УДК 510.21
ББК 87+22.1**

ISBN 978-985-6851-53-0

© Михайлова Н. В., 2008
© Оформление. МГВРК, 2008

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	2
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ФИЛОСОФСКОЙ ПРОБЛЕМЕ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ	5
ГЛАВА 2. ИСТОРИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ НАУЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О СУЩНОСТИ МАТЕМАТИКИ	16
2.2. Платонизм и антиплатонизм в формировании математического знания	41
2.3. Исследование математических проблем в духе критического рационализма	60
ГЛАВА 3. ФИЛОСОФСКАЯ КОМПАРАТИВИСТИКА И ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТЬ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПОЗНАНИИ.....	86
3.1. Философско-математический анализ концепции дополненности	88
3.2. Программа Гёделя и направления развития философии математики	107
3.3. Современные методологические установки и гильбертовские идеализации.....	130
ГЛАВА 4. ПРОБЛЕМА ЕДИНСТВА И ЦЕЛОСТНОСТИ ПРОГРАММЫ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ	156
4.1. “Непостижимая эффективность” реального стиля математического мышления.....	158
4.2. Методологическая программа Гильберта и проблема непротиворечивости	177
4.3. Системная триада философско-методологических программ обоснования математики	196
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	222
ЛИТЕРАТУРА	228

ВВЕДЕНИЕ

Восхищаясь практической эффективностью математической теории, философы математики и методологи науки, прежде всего, отдают должное ее гармоничности, простоте, “созидательному синтезу” и обобщению научных гипотез, способствующих целостности познания. О синтезе как методе научного исследования можно говорить в различных смыслах, например, как об обобщении определенной теории, включающем в нее предшествующие теории, или как о широком объединении нескольких теорий, в котором сглаживаются их противоречия. В самом общем случае синтез, как метод исследования, заключается в мысленном соединении различных сторон предмета исследования в единое целое, осуществленном как в практической деятельности, так и в процессе сознания.

Что касается методологических исследований, то интерес к ним был не только со стороны философии математики, но и сама математика нуждалась в подобной работе. Анализу специфического набора методологических средств в различных областях научного знания посвящены работы многих белорусских ученых по общей и частной методологии науки, логике и методологическим проблемам математики. Это такие известные математики, логики, философы и физики как В.В. Амелькин, В.Ф. Берков, М.И. Вишневецкий, П.А. Водопьянов, Ф.Д. Гахов, А.Д. Егоров, М.А. Ельяшевич, Н.И. Жуков, А.И. Зеленков, П.С. Карак, В.К. Лукашевич, А.И. Осипов, Э.М. Сороко, В.П. Старжинский, Е.А. Толкачев, Л.М. Томильчик, Д.И. Широков, В.И. Чуешов, Л.А. Янович, В.И. Янчевский, Я.С. Яскевич и др.

Методологическая ценность философии науки зависит от того, в какой мере она опирается на познание общезначимых методологических связей в объективном мире. “Знания о совокупности принципов и методов, применяемые в той или иной специальной научной дисциплине, – по авторитетному мнению В.Ф. Беркова, – составляют ядро конкретно-научной методологии” [17, с.76]. Формирование ядра математической методологии оказывает существенное влияние на формирование окончательной структуры математической теории. Ядро абстрактной математической теории приобретает устойчивость, когда система составляющих его логических связей приобретает статус вполне завершенных, то есть не подлежащих дальнейшей существенной корректировке.

Методологический смысл слова “системный синтез” отличается от простого соединения принципов тем, что он представляет собой слияние исходных, даже противоположных, принципов в новый принцип, имеющий новый смысл, сущность которого состоит в том, что он включает методы исследования как составляющую часть своего методологического арсенала. Синтез научных знаний в попытках построения единой физической картины мира стал идеалом научного познания с середины XX века. Проблема единства, как математики, так и программы ее обоснования не нова, она ставилась, начиная с той эпохи, когда математика оформилась как самостоятельная дисциплина. Актуальность исследования проблемы обоснования математики

состоит в том, что она пока не имеет удовлетворительных подходов к ее решению. Исторически попытки ее решения тесно связаны с общезначимой философской проблемой единства математического и гуманитарного знания.

Среди известных российских и зарубежных специалистов по философии математики, оказавших в разное время заметное влияние на понимание методологических проблем современной науки, можно выделить работы таких известных авторов, как Е.И. Арепьев, А.Г. Барабашев, Б.В. Бирюков, Г. Вейль, Л. Витгенштейн, В.Э. Войцехович, В.А. Карпунин, Ф. Китчер, Б.Г. Кузнецов, И. Лакатос, В.В. Мороз, В.В. Налимов, В.Я. Перминов, Ю.П. Петров, В.Н. Порус, Г.И. Рузавин, Ю.В. Сачков, Дж. Фанг, Г. Фреге, В.В. Целищев, А.П. Юшкевич и многих других. Философско-математическому сообществу всегда не хватает таких философов науки, которые выполняли бы роль “соединителя” методологических противоположностей в математике с помощью общеполитических принципов.

Философия математики есть часть философии, поэтому в ней отражаются те тенденции, которые свойственны всей философии. В общеполитическом аспекте в отношении анализа и синтеза в различных областях знания, в том числе и философии математики, мы встречаемся с проблемами, напоминающими ситуацию в квантовой физике. С точки зрения квантовой механики микромир устроен так, что при одновременном измерении координаты и импульса в любом возможном состоянии мы находимся в плену у математического неравенства, которое называется “соотношением неопределенностей”. Однако сущность этого соотношения состоит не столько в том, что координату и импульс нельзя одновременно измерить, сколько в том, что эти понятия в некоторых случаях не являются точно определенными. Поэтому соотношение неопределенностей возникает с самого начала, еще до процедуры измерения, как математическое утверждение.

Соответствующие трудности обусловлены тем, что, как заметили А.Д. Егоров и И.Д. Егоров, “сам принцип неопределенности свидетельствует о том, что человек не просто “видит” данный объект, но одновременно блокирует другие возможные “видения”. Эта мысль особенно четко прослеживается при “видении” идеальных объектов” [59, с.83]. Например, алгоритмическое толкование понятий математики, понимаемое в контексте конструктивной установки, противостоит теоретико-множественным понятиям формального направления, в котором рассматриваются абстрактные множества элементов произвольной природы. Эффективность математики отчасти состоит в том, что она может оперировать со случайными величинами, исследуя различные закономерности на детерминированном языке. Естественный исторический рост абстрактности математики стал противоречить представлениям о ней как науки о непреложных фактах, данных нам с некоторой очевидностью, что обусловило методологический конфликт между сторонниками символической и содержательной математики.

Философско-методологический облик математических теорий никогда не был однозначным на всем протяжении истории математики. В математике наряду с развитием классических разделов математики постоянно возникают

новые области математики. Чтобы за техническими трудностями увидеть методологическую сущность новых методов исследования требуется большая культура научного мышления. Взаимопониманию философов и математиков способствовали такие профессиональные математики, интересующиеся историческими и философскими аспектами своей науки, как А.Д. Александров, А.В. Архангельский, Р.Г. Баранцев, А. Гротендик, С.С. Демидов, Ж. Дьедонне, Ю.А. Ершов, М. Клайн, А.Н. Колмогоров, П.Дж. Коэн, Г. Крайзель, С. Мак-Лейн, Ю.И. Манин, А.А. Марков, Ф.А. Медведев, Н.Н. Непейвода, А.Н. Паршин, Р. Пенроуз, В.А. Успенский, Г.Дж. Чейтин, И.Р. Шафаревич и др. Хотя еще со времен Платона философы настаивали на достаточно строгой разработке системы математических знаний и даже принимали в ней участие, инициатива всегда исходила из недр самой математики. Поэтому в этом исследовании делается акцент на философско-методологические высказывания профессионалов от математики в попытке сведения наличного философско-математического материала в единое целое.

Стремление к синтезу и новой методологической целостности, заменяющей недостижимую полноту, связано с идеей тринитарности, которая находит плодотворное применение в синергетике. Тернарные комплексы вполне закономерно появляются в философии науки на пути к системной классификации. Математик и методолог Р.Г. Баранцев рассматривает системную триаду в качестве простейшей структурной ячейки синтеза. “Системная триада объединяет три равноправных элемента, каждый из которых может участвовать в разрешении противоречий между двумя другими как мера компромисса, как третейский судья, как фактор их сосуществования в целостной системе” [14, с.13]. Сущность системного синтеза программ обоснования математики состоит в том, что с помощью системной триады можно осуществить синтез противоположностей, ведущий к построению цельного мировоззрения. Хотя для важнейших математических теорий была доказана их относительная непротиворечивость, проблема обоснования математики в широком смысле, состоящая в нахождении общих принципов построения математических теорий, гарантирующих их непротиворечивость, пока еще не получила признанного философами и методологами науки решения.

Для этого необходим синтез, объединяющий концепции всех основных направлений философии математики, точнее системный синтез, включающий в себя взаимосогласованные и дополняющие друг друга программы обоснования математики. Анализу подобного подхода к обоснованию математики посвящено настоящее исследование. Но для реализации соответствующих формальных построений нужен выход в новое смысловое пространство, необходимое для понимания практической эффективности новой концепции обоснования. Таким образом, теоретическая задача предпринятого исследования по обоснованию математики состоит в переходе к новым критериям, способным совмещать в себе системную применимость к философским направлениям в математике.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ФИЛОСОФСКОЙ ПРОБЛЕМЕ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

К началу XX века философия математики осознала себя как область, имеющая значение не только для решения чисто философских проблем. Проблема обоснования математики была сформулирована как проблема обоснования непротиворечивости математических теорий. Целесообразно разделить математический и философский подходы к этой проблеме, которые различаются не только по своим задачам, но и по своим средствам. Математический анализ проблемы связан с рассмотрением математической теории в соответствии с принципами определенной программы обоснования. Философский анализ проблемы, опирающийся на общие характеристики научного познания, тенденции развития знания и его социокультурные детерминанты, не предполагает математической строгости и однозначных выводов.

Как утверждает известный философ математики В.Я. Перминов, “общая методология программ обоснования математики, выдвинутая в начале XX века, с современной точки зрения должна быть признана совершенно неудовлетворительной” [138, с.148]. Общезначимое понимание результатов, достигнутых в истории обоснования математики и перспектив в решении этой проблемы, невозможно без философско-методологического анализа тенденций развития современной математики. Все исторически оправданные программы обоснования математики содержат в себе некоторую систему допущений, имеющих гносеологический характер. Возможно поэтому, несмотря на некоторое продвижение в прояснении и обосновании этих допущений проблема обоснования математики все еще далека от своего решения, поэтому она является целью настоящего исследования.

Трудность предпринятого исследования состоит в том, что из всех известных в философии науки обосновательных процедур наиболее сложной является попытка обоснования математики, поскольку она, как правило, традиционно сводится к философско-методологическому обоснованию непротиворечивости математических теорий. Прямым следствием сугубо математического подхода к проблеме обоснования математики при реализации трех классических программ – логицизма, формализма и интуиционизма – было то, что, в сущности, они представляли собой три различных способа редукции содержания математики к ее очевидным основам. Например, подготовка любой математической задачи для ее решения на компьютере составляет вид формалистской редукции. Основной недостаток программы логицизма в обосновании математики состоит в том, что он не вытекает из общего статуса математической теории и, следовательно, не может претендовать на универсальность.

Математика не нуждается в логическом обосновании не потому, что оно невозможно, а в силу того, что само развитие математической теории можно рассматривать как постоянный процесс ее обоснования. Как подчеркивает

философ математики Е.И. Арепьев, “специфика математического знания заключается в том, что его онто-гносеологический фундамент опирается, прежде всего, на соответствие исходных воззрений общей картине функционирования и преобразования самой науки” [7, с.42]. Хотя лежащая в основе логицистской программы идея обоснования непротиворечивости на основе истинности по-прежнему сохраняет свое значение. Вообще говоря, проблемы истины в математике нет, поскольку, сравнивая математическую теорию, реализованную в техническом приспособлении, мы не задаем вопроса истинно оно или нет, так нам важно лишь работает оно или нет. Тем не менее, вопрос о критериях истинности все же встает в применениях математики и относится к числу философских проблем.

В физике аналогом истинности являются вопросы о реальности, которые в силу изначально подразумеваемой общности не имели значимых последствий для прогресса физики. По мнению логицистов, истины логики представляли более надежный базис для математики, так как они априорны и не зависят от практической деятельности человека. Но в современной математике истина неединственна, что ничуть не противоречит репутации математики как наиболее безупречного метода достижения достаточно достоверного знания о мире. Наиболее глубокую причину кризиса логицистской программы обоснования математики вскрыл Курт Гёдель, показавший, например, что система “*Principia mathematica*”, построенная Бертраном Расселом и Алфредом Уайтхедом, как и всякая иная система, средствами которой можно построить арифметику, существенно неполна. Последнее означает, что нельзя найти такую конечную систему аксиом, из которой можно было бы получить любое истинное предложение арифметики, а значит, и всей математики вообще.

Редукция математики к логике не может быть реализована без явного или неявного включения в логику понятий и принципов, связанных с бесконечностью, что противоречит статусу логики как системы понятий не связанных с идеей бесконечности, а тем более с наиболее плодотворной в математике идеей актуальной бесконечности. Поэтому логицизм как направление в философии в настоящее время является мало продуктивным. “Применение понятия актуальной бесконечности есть то, что в философии математики принято называть платонизмом” [94, с.90]. Корни платонизма, по мнению историка математики З.А. Кузичевой, следует искать в XIX веке, когда математики стали пользоваться актуальной бесконечностью совершенно свободно и актуально бесконечные множества объектов стали составлять основное содержание традиционной математики. Кризис логицистского метода обоснования математики способствовал появлению новых подходов и новых методов обоснования, среди которых, прежде всего, необходимо выделить формалистское и интуиционистское направления в обосновании математики.

Основоположник программы формализма выдающийся математик Давид Гильберт существенно опирался в процессе обоснования на метод формализации содержательной математики. Идея его “плана спасения” теории множеств состояла в предложении аксиоматизировать эту теорию в духе

разработанной им метаматематики, или теории доказательств, а затем доказать непротиворечивость полученной системы аксиом. Суть требования непротиворечивости можно понимать так, что аксиоматически определенный математический аппарат вообще может работать. Формализованная теория предполагала соответствия некоторой содержательной метатеории, которая включает в себя описание структуры формализма, общие принципы логики и правила для действий, допустимых в рамках формализованной теории. Формализация теорий является эффективным способом получения систем знаний, отображающих общие закономерности исходной теории, поскольку согласно основному формалистскому требованию, все объекты должны быть явно перечислены. Гильберт взял у логицистов положение аксиоматизации и формализации математической теории, добавив в свою программу обоснования принцип финитизма, согласно которому оперирование с бесконечным можно сделать надежным только через конечное.

Впоследствии оказалось, что финитистские методы пригодны для обоснования непротиворечивости сравнительно бедных формальных теорий, например, без аксиомы полной математической индукции. Более того, скольконибудь содержательная часть математики не может быть полностью формализована, а для той, которая формализована, непротиворечивость не может быть доказана в рамках формализовавшей ее системы. Аналитический обзор литературы показывает, что основная слабость формалистской программы состоит в незавершенности ее методологического обоснования, поскольку ограничение сферы надежной метатеории финитностью и арифметизируемостью не соответствует развитию современной математики в целом. Своеобразную программу преодоления этих трудностей в математике, возникающих при попытке строить ее исключительно на базе теории множеств, предложил в самом начале XX века совсем тогда молодой математик Лёйтзен Брауэр. Эта программа получила широкую известность под названием интуиционизм.

Философы математики всегда обращали особое внимание на выяснение логической структуры положений, лежащих в основе различных программ математики. При этом преследовались две цели, вообще говоря, не совпадающие между собой для математики в целом, которые можно назвать “программа-минимум” и “программа-максимум”. Если первая призвана обеспечить непротиворечивость и методическую ясность преподавания математических курсов, то вторая стремится обеспечить истинность всей математики как целостного знания. По этому поводу известный специалист по математическому моделированию Ю.П. Петров сказал: “Забегая вперед, отметим, что программа-минимум была выполнена, а программа-максимум не реализована и до настоящего времени. Можно предположить, что она и никогда не будет выполнена, поскольку уже в начале XIX века Гегелем было показано, что любое достаточно богатое понятие внутренне противоречиво” [140, с.77]. Тем не менее, интеллектуальным ядром современной математики остаются системные идеи, позволяющие размышлять над проблемами сложности математических моделей и эффективности вычислительных экспериментов.

Мотивы, которые побуждали математиков принимать и развивать интуиционистскую, а затем и конструктивистскую программу обоснования математики носили и чисто математический, и философский характер, вырастая из размышлений о роли интуиции в познании вообще. Согласно интуиционизму математическое высказывание должно быть утверждением о выполнении некоторого построения, которое должно быть ясным само по себе, чтобы не нуждаться ни в каких обоснованиях. В интуиционистской программе можно выделить негативный и позитивный аспекты: первый состоит в отрицании существования некоторых основных понятий теоретико-множественной математики, а второй – в разработке конструктивных аспектов математики. Заметим, что финитизм программы формализма был, не столь радикален, как финитизм программы интуиционизма. Например, Гильберт считал возможным сохранить понятие актуальной бесконечности в тех пределах, в которых оно допускает финитное обоснование, а Брауэр хотел вообще устранить это понятие из математики.

В конце XX века стали намечаться новые пути развития математики, и обращение к ее ретроспективе является одним из средств осмысления путей ее дальнейшего развития. Анализ природы интеллектуальной деятельности в любой области знания – одна из труднейших философских задач. Обсуждать на нематематическом уровне специфику интеллектуальной деятельности в области математики труднее, чем заниматься ею непосредственно. Исследование актуальных проблем философии математики предполагает соответствующую профессиональную подготовку, а также некоторую эрудицию, выходящую за рамки философии науки как теории познания. Философия, подобно математике, опирается на аргументацию, поскольку обе науки используют логику, но в отличие от стандартов обоснования, принятых у математиков, стандарты аргументации философов сильно различаются даже во взглядах на одну и ту же проблему. Следует отметить, считает философ науки А.И. Осипов, “такую особенность научного знания, как системность, обоснованность и принципиальная проверяемость. Эта особенность отчетливо проявляется на фоне обыденного и художественного познания” [126, с.105]. Кроме того, в связи с появлением математической логики, как части математики, логика больше не является только областью философии.

Современная методология обоснования математических теорий опирается на онтологическое различие математических структур, существенно учитывая при этом их логические и внелогические степени обоснованности. С большой долей уверенности можно сказать, что для многих людей, не сталкивающихся с современной математикой в своей профессиональной деятельности, кажется, что математическое знание является нетривиальным. Но в соответствии с принципом рациональности, принятым в естественных науках, природа никогда не формирует в сознании человека ничего такого, что могло бы ухудшить его познавательные способности. Хотя рационалисты, к которым можно отнести Платона, Декарта и Лейбница, полагали, что, по крайней мере, какое-то нетривиальное знание дано нам априорно, а логическая конструкция, которая способна эти явления непротиворечиво описать, может быть создана

человеческим разумом. С точки зрения Платона, не только нетривиальное математическое знание, но вообще всякое подлинное знание не зависит от опыта. Хотя собственное математическое творчество Платона было весьма незначительно, главной его научной заслугой была систематизация методов математического доказательства, а именно выделение анализа и синтеза, то есть таких понятий, которые актуальны и в наше время и с помощью которых изучаются общие проблемы философии математики.

Уже в первых работах платоновской “Академии” историки и философы науки встречаются с явлением, характерным для всех последующих этапов развития науки, не исключая и математики, суть которого, по мнению историка математики В.П. Шереметевского, сводится к следующему: “Новые приемы, новый отдел науки, новое учение обыкновенно быстро растут в ширину, пополняются содержанием, добываемым индуктивным или дедуктивным путем, спешат обнаружить свою силу на многочисленных приложениях, так сказать, доказать свое право на существование; уже после этой первой стадии быстрого разрастания в ширину является потребность критического исследования, самых основ учения, потребность создать философию предмета, подвести фундамент под здание, уже выстроенное” [175, с.18]. Поэтому уже первые шаги математической науки в Греции отличались укреплением эмпирических формул египетской геометрии абстрактными математическими доказательствами, которые затем легли в основу новых предложений.

Наука естественно развивается непрерывно, хотя ей свойственен некоторый здоровый консерватизм. Величайшим открытием философии математики XX века было методологическое осознание того непреложного обстоятельства, что различные научные знания, использующие математику, сильно взаимосвязаны. Одним из главных достижений математики прошедшего столетия можно назвать понятие бесконечномерного пространства, которые в математике называются гильбертовыми пространствами и его различными обобщениями, а именно, банаховыми, метрическими и топологическими пространствами. основополагающие работы немецкого математика Давида Гильберта стали естественным развитием частных работ шведского математика Эрика Фредгольма, связанные на рубеже XIX и XX столетий с решениями конкретных классов интегральных уравнений, получивших в дальнейшем название “фредгольмовых”. Благодаря непрерывному, но, вообще говоря “недифференцируемому”, характеру развития математики Гильберту удалось выделить такую важную математическую структуру как гильбертово пространство, которая служит прекрасной иллюстрацией генезиса глубоких и плодотворных обобщений в математике.

Прогресс математики зависит не только от решения конкретных практических задач, но и от создания новых понятий и теорий. Например, с бесконечномерными пространствами связаны огромные области современной математики, включающие теорию линейных операторов, в том числе фредгольмовых операторов их обобщений, теорию обобщенных функций, спектральную теорию операторов и многое другое. Известный историк и философ математики М.И. Монастырский удачно охарактеризовал специфику

развития математики прошлых столетий: “Если образно сравнивать математику XIX и XX столетий, то математика XIX столетия представляется как набор точек, образующих некоторое пространство, на которое мы смотрим из пространства более высокой размерности – математики XX столетия” [115, с.62]. При всей условности и размытости онтологических границ развития математики взгляд в прошлое выявляет некоторые “особые точки” с новыми мировоззренческими взглядами на развитие математики.

Так анализ внутренних проблем теории рядов Фурье и теории вещественных чисел привел Георга Кантора к созданию теории множеств – одному из самых поразительных созданий человеческой мысли. Система аксиом теории множеств, которую математики предполагают априори адекватной для получения математических истин, должна быть непротиворечивой. Процедуры, используемые в современной математике и опирающиеся на туманные рассуждения об “огромных” и сложных по структуре множествах, не являются полностью удовлетворительными. Строгий формальный подход не выдерживает критики, поскольку понятия математической истины выходит за пределы теории формализма, о чем как раз и трактует математический платонизм работающих математиков, согласно которому математическая истина простирается за пределы сотворенного человеком.

Современная философия математики вступила в период, когда проверяется ее способность дать адекватный ответ на важнейшие вопросы обоснования математики. Общая тенденция развития теории познания и философии науки привела к необходимости переосмысления современных концепций обоснования математики. История математики знает немало примеров, когда ушедшие в прошлое споры оказывались вновь созвучными современному уровню развития науки. Известный философ науки В.Н. Порус сказал по поводу переосмысливания концептуальных вопросов последующими поколениями: “Философия вообще полагается сферой “вечных вопросов”, и философия науки – не исключение, хотя существует мнение, что в этой области все-таки можно рассчитывать на однозначность и определенность решений” [146, с.18]. Самая известная проблема такого рода в философии науки – это теорема Гёделя и соотношение формального и неформального в математической теории. Их философское осмысление показывает, что даже прямые рациональные действия в сложной философско-методологической ситуации приводят иногда к результатам, противоположным ожидаемым.

Элементы дополнительности как нового стиля мышления и способа научного исследования появились задолго до окончательного формирования этой методологической концепции, способствовавшей снятию противоречий между понятиями классической механики и квантовой физики. В современной математике соответствующие аналогии можно проследить на примере введения чисто экзистенциальных доказательств, основанных на теории бесконечных множеств, оказавшей существенное влияние на развитие всей математики. Это, пожалуй, наиболее серьезное методологическое изменение, прошедшее в математике со времен древнегреческой науки. Для современной философии

математики остается проблематичным отношение математического мышления к наблюдаемой реальности. Для античности главная методологическая проблема состояла в таком разграничении математических абстракций и опыта, которое оставляло бы возможность понять способы приложений математики. В науке Нового времени природа стала мыслиться как структура, допускающая математическое исследование не только внешних форм, но и ее внутренних законов, что способствовало распространению взглядов идентичности математики и физики.

В начале XX века появились новые направления в философии науки, превратившие математическое мышление в объект исследования. Название “дополнительность” новая методологическая идея получила в трудах известного физика Нильса Бора. То, что дополнительный способ описания явлений стал применяться не только в физике, но и в смежных областях науки, говорит о том, что в идее Бора с самого начала было “угадано” нечто такое, что не является только “чисто” физическим, а находится на стыке между наукой и философией. Трудность такого подхода заключается в том, что, по словам Мераба Мамардашвили, “человеку начинает казаться, что он имеет дело с миром, который чуть ли не исключает саму возможность его понимания” [106, с.171]. Поэтому приходится заново возвращаться к прежним критериям и самим основаниям нашей возможности высказываться о мире и месте человека в нем. Уместно заметить, что в работах Нильса Бора предусмотрительно не встречается названия “принцип” по отношению к дополнительности. Он предпочитает пользоваться более осторожными и методологически не обязывающими выражениями, такими, например, как “идея”, “понятие”, “способ” и тому подобное.

Может ли анализ философских проблем содействовать решению собственно математических задач и открытию новых фактов? В качестве ответов на эти вопросы можно заметить, что обоснование математики как таковое не ведет непосредственно к открытию новых фактов в самой математике, но в процессе обоснования могут создаваться методы, которые со временем приобретают самостоятельную ценность. Это оправдано тем, что философия математики подходит к своему объекту – математике – с теоретико-мировоззренческих позиций. После работ математика и философа Георгия Кантора о бесконечных точечных совокупностях и теории множеств, стало ясно, что математика в целом, как математический процесс, зависит от сущности натурального ряда и опирается на идею непрерывности, отражающую природу континуума. Несмотря на важность глобальных вопросов об истории оснований математики, после знаменитых рефлексивных результатов математика и логика Курта Гёделя основной проблемой философии математики стала проблема обоснования.

В качестве единого методологического основания в проблеме обоснования математики можно рассмотреть известную схему триадической спирали “тезис – антитезис – синтез”, которая в разных философских системах не обязана сводиться к единственной гегелевской триаде. Но чтобы подняться по диалектической спирали развития, нужно выйти в другое измерение, для того,

чтобы обрести двумерный фундамент, задаваемый невырожденной тройкой одного уровня, лежащей в основе синтеза программ обоснования математики. Философ математики В.В. Мороз выделяет следующие значения термина “синтез” как определенного философско-математического взаимодействия: 1) синтез как “способ рассуждения”, то есть последовательное получение нового знания ранее доказанных утверждений; 2) синтез как “мыслительная операция”, которая получается в результате соединения частей объектов в единое целое; 3) синтез как “познавательная операция”, имеющая множество различных форм при теоретическом обобщении данных исследования, в том числе и по принципу дополнительности. Она вводит новое понятие “философско-математического синтеза”, интерпретируя его как “особый тип философско-математического взаимодействия, в котором философия и математика, соединяясь тем или иным образом в процессе рассуждения, участвуют в построении целостной картины действительности” [117, с.44]. В контексте нашего исследования обоснования математики, возникает необходимость в системной триаде, то есть в такой синтезирующей структуре, в которой есть “структурная многомерность”, “системная коррелятивность” и “смысловая целостность”.

Синтез основных программ обоснования математики как объектов данного исследования является новой концептуальной идеей философии математики. Заметим, что синтез элементов предваряется их выделением из нерасчлененного целого. Это необходимо для анализа их отличия друг от друга с целью соединения их частей на новом теоретическом уровне. Обоснование математики – это попытка найти такую общую теорию, с помощью которой можно было бы вывести всю математику по определенным правилам вывода, исходя из некоторых формальных систем аксиом. Если бы удалось обосновать такую математическую теорию, которую можно принять за основание математики, то на этом базисе можно было бы пытаться обосновать другие математические теории в соответствии с общей архитектурой математических теорий. С точки зрения философской рефлексии программа обоснования сама нуждается в собственном обосновании – математическом и философском – соответствующем их задачам. Но так ли существенна для математики проблема ее обоснования? Какую роль в самой математике играют философско-методологические исследования по основаниям математики?

При ответе на эти вопросы мы исходим из того, что логический статус теоретико-множественных принципов, используемых в современной математической практике, в действительности не является широко известным в сообществе работающих математиком даже сейчас. Единство математики проявляется, прежде всего, в том, что даже ее деление на чистую и прикладную математику не может быть строго проведено в силу общей сущности той и другой. Эта сущность заключается в изучении математических структур, а также в общности методов, применяемых для изучения этих структур. Но, несмотря на роль порождающих структур математики в ее методологическом единстве, довольно большая часть математики, например, не попавшая в трактат Бурбаки, не составлена из этих структур. Поэтому, вообще говоря,

нельзя настаивать на едином языке оснований математики. Учитывая исторически сложившиеся программы обоснования математики, в рамках которых происходит реальное формирование единого пространства математики, надо стремиться не просто к “синтезу как способу рассуждения” или к “синтезу как мыслительной операции”, а к взаимопониманию различных направлений философии математики, определяющему “естественный синтез”, который обогащает общематематический опыт, опирающийся на рациональное знание.

Можно сказать, что диадный анализ противоположных сущностей стал возможен благодаря тому, что квантовая механика описывает не осуществленное состояние микрообъекта, а потенциально возможное. Заметим также, что парадоксальность и неожиданность некоторых выводов квантовой механики и ее несоответствие нашей интуиции отчасти связаны с тем, что квантовая механика содержит в себе элементы случайности. В борьбе за “коммуникативное пространство” физик Нильс Бор распространил свой принцип дополнительности на другие формы научной культуры. Но из-за неустойчивости бинарных структур, как заметил философ естествознания Р.Г. Баранцев, “в естествознании рецепт золотой середины не прижился, так как несколько более высокий уровень строгости позволил понять ущербность попыток искать решение в интервале между двумя крайними вариантами” [13, с.25-26]. На бинарной оппозиции, как элементарной структуре анализа, синтез трудно построить. Для синтеза, в том числе и программ обоснования математики, нужна более емкая триадическая структура.

В современной математике методологическое мышление в значительной мере по существу формалистично: оно не склонно связывать строгость и убедительность доказательства с возможностями интуиционистской математики, а скорее со степенью его формализации. Такой подход, ни с исторической, ни с философской точки зрения не объясняет устойчивости математических теорем и практической эффективности различных математических моделей. Классическая математика сопоставляла свои конструкции с чем-то вроде “реальности” мира идей. С точки зрения платонизма эта реальность независима от сознания и находится с ним в предустановленной гармонии. Восприятию концепции предустановленной гармонии способствовало и развитие теории множеств. Однако выдвижение Брауэром своих возражений и своей позитивной программы интуиционистской математики и логики, способствовало изменению взглядов на аксиоматические теории, прежде всего в глазах философов и естествоиспытателей и в гораздо меньшей степени в глазах самих математиков.

В числе математиков, несогласных с этой программой, был Давид Гильберт, веривший в предустановленную гармонию, а значит и в правомочность оперирования с актуальной бесконечностью. На постоянно повторяющейся и сменяющейся “игре между мышлением и опытом”, говорил он в знаменитом докладе “Математические проблемы” (1900), “основаны те многочисленные и поражающие аналогии и та кажущаяся предустановленная гармония, которые математик так часто обнаруживает в задачах, методах и

понятиях различных областей знания” [43, с.403]. Представление о единстве мира идей существовало лишь до тех пор, пока протестующие голоса выдающихся математиков начала XX века не доказали обратное. С философских позиций отсутствие готовности принять внутреннюю интерпретацию теории множеств можно объяснить и с точки зрения двойственности языка “свойств” и “предикатов”, когда элементарное математическое выражение “обладать свойством” заменяют, если это необходимо, выражением “быть элементом множества”.

Если во второй половине XX века был популярен системный анализ, рассматривавший некие общие свойства систем, которые возникают у них как у целого, то в современной философии и методологии науки при анализе сложных нелинейных систем на смену ему постепенно приходит системный синтез. В контексте нашего исследования употребление словосочетания “системный синтез” как метода исследования нуждается в некоторых предварительных замечаниях и уточнениях. С точки зрения математики, такой синтез позволяет из массы факторов исторического развития научного знания извлечь именно то, что позволяет принять правильное решение. Важнейшим направлением развития философии современной математики становится формирование единого “пространства” программ обоснования математики. Замысел системного синтеза обоснования математики определяет цель исследования, состоящую в том, чтобы связать непротиворечивость аксиоматики с ее фактологической истинностью в рамках системных понятий. Для его воплощения необходимо несколько дополнительных друг к другу программ обоснования математики.

Поэтому основная задача современных исследований обоснования математики – проанализировать, каким дополнительным требованиям должны удовлетворять формалистские основания. Философия математики начала XX века в исследовании проблемы обоснования не вышла за рамки логических представлений. Естественная ограниченность логического анализа способствовала в итоге формированию понимания недостаточности каждой в отдельности программы обоснования математики, которое заключается, прежде всего, в отсутствии рациональных аргументов, определяющих границы обосновательных программ. Опираясь на достоверность и надежность математического мышления, а также методологический анализ проблемы обоснования, мы предлагаем новое понятие обоснования, соответствующее современному пониманию математики как науки, опирающееся на системный синтез формализма, платонизма и интуиционизма. При таком подходе к проблеме обоснования можно отказаться от формалистской философии математики, имитирующей математическую точность умозаключений, хотя соответствующая точность остается полезной в тех областях исследований, которые носят формалистский характер.

Дифференциация математики, несмотря на “переусложненность” ее новых теорий, не повлекла за собой утраты единства современной математики, что должно отражаться и в философии математики, которая раскрывает специфику программ обоснования математики на новом уровне абстракции. Хорошим

стимулом для развития философии и методологии математики являются такие ситуации, когда деятельное изучение природы ставит математике новые философско-методологические вопросы, решение которых заставляет математиков работать над изобретением новых математических приемов, а философов математики заботится об их сведении в единую систему основных положений науки.

ГЛАВА 2. ИСТОРИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ НАУЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О СУЩНОСТИ МАТЕМАТИКИ

В духе синергетического восприятия действительности, реальный мир отражается в нашем сознании нелинейно. Это нелинейное отображение нашего восприятия реального мира в “воображаемый мир”, в котором вырабатываются наши отношения, приводит к определенной независимости в подходах к обоснованию математики. По существу, это процесс сознательного конструирования нового содержания научного метода обоснования, под воздействием имеющихся конкретно-научных данных реального развития математики, выявляя его продуктивный потенциал за счет используемых оснований математики.

По отношению к современной философии математики существуют следующие полярные точки зрения. С одной стороны, исходя из признания того, что “ничего из этого не работает”, предпринимаются шаги по созданию новых направлений, пытающихся придать философии математики “новое дыхание”. Например, культивируется взгляд на математические образы как на специального вида социально-культурно-исторические объекты, согласно которому, математика должна освободиться от диктата платонизма и вести свою самостоятельную жизнь, определяя сама себе правила, отличные от стандартов классической философии математики. С другой стороны, есть и полное отрицание любой философии математики, основанное на убеждении, что “философская оценка математической деятельности бесплодна: математическая деятельность не имеет в себе скрытого смысла, искомого философией, и сама философия неправильно следует в своих собственных стандартах строгости, на которых основывается философия математики, за этой самой математикой” [170, с.140]. Тон сегодняшних философско-математических дискуссий изменился, возможно потому, что математики устали от бурной полемики первой половины XX века. Реальные противоречия оставались за пределами этих обсуждений. Тем не менее, в философии математики есть проблема гносеологии математического знания, решить которую математики без обращения к философии не могут: как согласовать веру в абсолютную истинность математических принципов с идеальными математическими абстракциями?

В связи с трудностями обоснования современной математики философы науки пытаются “смягчить” прежнюю жесткость принципа рациональности, обычно отождествляемого с дедуктивно-аксиоматическим доказательством, обращаясь к содержательным методам исследования математики. По существу речь идет о синтезе взаимосвязанных познавательных процессов исследования в надежде обрести на этом пути философское приращение смысла. Анализируя эволюцию философско-математических традиций, а также раскрывая предметную сущность математического знания и определяя их отношения к сходствам и различиям в философско-методологических программах обоснования мы открываем перспективу философского синтеза этих программ.

Философ и методолог науки В.К. Лукашевич на основе рефлексивного осмысления структуры научного метода делает следующий вывод, обосновывающий выбранную методологию исследования: “Непрерывность процессов ассимиляции новыми методами растущего предметного знания и обеспечиваемое этим расширенное воспроизводство продуктивного потенциала методов науки позволяет квалифицировать их развитие как динамический (постоянно видоизменяющийся) синтез предметно-когнитивного и инструментального содержания научного прогресса” [100, с.74]. Философия математики в целом, как и сама математика, является реакцией на единство в духе целостности духовных и материальных ценностей.

Для лучшего понимания дальнейшего изложения, заметим, что, проанализировав программы обоснования математики, наиболее плодотворные и значимые в математике высших достижений, философия математики постнеклассической науки, в контексте междисциплинарного диалога, готова переоткрыть для себя понятие “математического реализма”. Заметим, что термин “переоткрытие” можно интерпретировать как некий “третий” элемент, который достраивает бинарную оппозицию программ обоснования “формализм – интуиционизм” до методологической триады обоснования “формализм – платонизм – интуиционизм”. Круговой процесс нелинейной коммуникации от частей к целому и обратно, а также связанной с ним тринитарной логики, заставляет нас возвращаться в мир идей или идеальных сущностей в духе Платона. Наряду с общефилософскими аргументами в пользу понимания сущности нового метода в подходе к программе обоснования математики такому пониманию способствуют и аргументы методологического характера. Прежде всего, следует указать на рациональную обоснованность нового метода, как важнейшего критерия научности философско-методологического знания, с помощью которого обнаруживается концептуальный смысл общенаучных подходов. Новое направление в философии математики, ориентированное на сущность природы математики и ее эволюцию видит свою главную задачу в открытии новых способов коммуникации знаний, а не редукции одного типа знания к другому, и восстановлении или реконструкции ее прежних прочно установившихся традиционных подходов к обоснованию.

Для наших дальнейших рассуждений важно мнение выдающегося американского математика Джона фон Неймана по поводу этой и других философских проблем, согласно которому, “в математику существенно должен входить некий нематематический элемент, каким-то образом связанный либо с эмпирическими науками, либо с философией, либо с эмпирическими науками и философией” [121, с.90]. На философии математики как части философии сказываются все тенденции, которые свойственны философии. Если бы современная математика представляла собой совокупность или систему разных, хотя и равноправных научных дисциплин, то, возможно, что одна и та же математическая проблема могла бы решаться совершенно разными способами. Тогда для описания одного и того же фрагмента реальности пришлось бы рассматривать множество формальных систем. Такой эпистемологический

поворот в исследованиях заметен не только по отношению к основаниям математики, но и в философии математики в целом.

2.1. Контroversa “рациональное – внерациональное” в математическом познании

Выдающуюся роль в становлении новой формы рационального мышления в математике, когда математические предложения из общепринятых формулировок эмпирических фактов переходили в разряд положений, требующих доказательства, исходя из некоторых посылок, сыграл древнегреческий математик, философ и государственный деятель Фалес Милетский. Его первые теоремы в геометрии устанавливали, казалось бы, очевидные всем истины, например, что диаметр делит круг пополам. Однако гениальность первых греческих математиков проявилась в осознании именно того, что математические предложения нуждаются в доказательстве. Насколько известно, замечает академик Д.В. Аносов, древнегреческие историки науки “не отмечали качественного отличия возникшей у них науки от протонауки Древнего Востока, то есть они не осознали главного достижения своих соотечественников!” [5, с.5]. Именно они впервые начали разрабатывать дедуктивную трактовку геометрии. Этот подход оказался настолько плодотворным и универсальным, что в последующие времена именно математические образы порождали такие физические модели, которые вполне соответствовали результатам эксперимента.

В настоящее время алгебро-топологический и аналитико-вероятностный аппараты пока мало совместимы в квантовой теории поля. Каждый математик предпочитает свою область исследования другим, считая, что, в конце концов, всякое абстрактное достижение все же получит возможное применение в будущем. На основе одних лишь только философских обобщений невозможно дать обстоятельный ответ на вопрос: “что такое математика?” Историк философии науки Б.Г. Кузнецов говорил: “Математика, включая самые общие и фундаментальные разделы, говорит о Вселенной, и говорит нечто такое, что может быть подтверждено или отвергнуто, модифицировано, измерено экспериментальным познанием бытия” [95, с.336]. Для понимания “сути математики” в еще большей степени необходимо философское осмысление составляющих ее элементов, поскольку математика не обладает монополией на абстракцию. Принято считать, что не только математика, но и вся наука, понимаемая как единая система знаний и как отдельная сфера человеческой деятельности, стремящаяся к получению новых знаний, даже не обязательно непосредственно связанных с практической деятельностью, возникла в Древней Греции. То, что было до греков, называют иногда “протонаукой”, в смысле предшествующее науке и из чего она развилась, но в полной мере наукой еще не являлось. Протонаука зародилась в Древнем Египте и Древней Месопотамии.

По аналогии с математической терминологией историк математики А.П. Юшкевич предлагал назвать древневосточную математику “кусочно-

дедуктивной” [178, с.50]. Начало этого процесса отстояло от зарождения математики древних греков примерно на столько же, на сколько древние греки, интересующего нас периода в истории, отстоят от нас. Сами греки считали родиной науки Египет, с которым у них были налажены хорошие связи. Теперь уже известно, что она независимо возникла и в Месопотамии, причем уровень развития вавилонян был в некоторых отношениях даже выше. Одни авторы, например Аристотель, полагали, что зарождение математики связано с размышлениями египетских жрецов о возвышенных предметах. Другие, в том числе Геродот, считали, что зарождение математики обусловлено практической необходимостью, а именно, землемерными работами. Кто же был прав? С философской точки зрения, речь идет о математических задачах практического происхождения и о развитии математики под действием внутренне присущих ей причин. Этот экскурс в древнюю историю приведен для того, чтобы показать, что целостная математическая наука изначально была дуалистична в своей основе. Это вытекает из различия формального и содержательного знания. В известной степени прав и Аристотель, и Геродот. Оба фактора, на которые они обратили внимание, действуют и в наши дни. Правильнее говорить о некотором взаимном балансе в каждом конкретном случае, а именно, была ли их роль равноправной или же роль одного из них была ведущей. Например, практический характер имеют и применения математики в других науках, даже если изначально речь шла только о внутреннем развитии. Хотя применительно к самому началу, возможно, прав Геродот, поскольку дошедшие до нас математические тексты адресованы не жрецам, сословие которых появилось позже, а писцам – государственным служащим, которые должны были уметь производить простейшие вычисления.

Несмотря на некоторые пересечения, исследования в формальных науках принципиально отличаются от исследований в эмпирических науках. Если в эмпирических науках мы стремимся ограничить возможное, пытаюсь свести, насколько это возможно, к действительному, то в формальных науках мы стремимся ограничить предполагаемое необходимым, что ничего кроме разума не требует. Поэтому различие между эмпирическим и формальным знанием в значительной мере является не онтологическим, а методологическим. Хотя привычка “онтологизировать” математические понятия оказалась довольно устойчивой философской традицией. Отчасти, это связано со спецификой математики, интересующейся свойствами и отношениями, присущими довольно большому числу объектов. Математика греков была конструктивной, поскольку по существу была основана на применении простейших построений и алгоритмов элементарной математики. Поэтому современная математика с ее алгоритмической и конструктивной установкой как бы возвращается к принципам древнегреческой математики, разумеется, с учетом всего ее предыдущего развития. Философ и логик Н.Н. Непейвода обратил внимание на одну принципиальную особенность, подтверждающую глубину интуиции древних греков, основанную на чисто методологических и эстетических соображениях. “Использование классической логики – инструмента, ориентированного на дескриптивные, а не на конструктивные применения – не

привело греческую математику к неконструктивным методам и теоремам” [122, с.220]. Даже доказательства от противного использовались ими лишь при обосновании уже проведенных построений. Основная причина такого явления связана с “остановкой греков перед понятием действительного числа”, точнее с их антипатией к явному использованию чисел в строгих математических рассуждениях, что, на первый взгляд, выглядит странно с точки зрения классической математической парадигмы. Действительные числа использовались как пропорции, чему не мешало их знание о несоизмеримости.

Древнегреческие математики знали алгоритм для вычисления отношения окружности к диаметру, то есть иррациональность числа π , составляли таблицы для синуса и исследовали конструктивно заданные кривые. Заметим, что, по мнению академика А.Н. Тихонова и Д.П. Костомарова, “история вычисления числа π тесно связана с общим прогрессом математики и потребностями практики” [157, с.42]. Погоня за все более точным значением числа π позволила математикам проникнуть в таинственные и малодоступные “закоулки теории чисел”. По этим вычислениям оценивается совершенство и надежность используемого компьютера. Вот уже более двух с половиной тысячелетий число π является частью математической культуры, а в конце прошлого столетия оно было вычислено с точностью более ста миллионов десятичных знаков. Отметим также, что число π появляется в самых неожиданных задачах, не имеющих никакого отношения к окружностям. Например, если из множества целых чисел выбирается наугад какое-то число, то тогда вероятность того, что оно не имеет повторяющихся кратных простых делителей, равна $6/\pi^2$. В математическом анализе такие числа, как π и e , имеют особое значение, а так как математики стремятся сделать свои теории достаточно общими, в частности, для простоты и гладкости изложения, то они выделяют в качестве особых элементов довольно много вещественных чисел, то есть естественно приходят к изучению теории вещественных чисел. Но греки не вводили понятий произвольного вещественного числа, а также произвольной функции или кривой. Глубинная причина этого явления вскрылась лишь в середине XX века, когда стало известно, что классическая геометрия и элементарная теория действительных чисел, без явного упоминания целых чисел как множества, полны и разрешимы. Это означает, что любое утверждение на языке этих теорий либо доказуемо, либо нет.

Но как об этом могли догадаться греки, загадочным для нашего понимания образом осознавшие двойственность дескриптивного, то есть описательного, и конструктивного? Реалистическая трактовка математики, по мнению американского философа Джеральда Каца, предполагает существование неэмпирического способа познания истины, который в картезианско-лейбницианской традиции объяснялся “светом разума” [188, с.498]. Хорошей иллюстрацией трудностей, которые возникают при желании дать некую классификацию концепций и направлений современной философии математики, является неоднозначность понимания такого термина как “реализм”. По мнению реалиста, числа существуют, по мнению антиреалиста – нет. Реализм имеет много смыслов, поэтому ограничимся реализмом в

онтологии, согласно которому, математические объекты существуют независимо от математиков. Задача “трезвых реалистов” состоит в том, чтобы понять, как возможно знание об объектах, не находящихся с нами в причинной связи. Ни одна из существующих философий математики не решает этого вопроса. Напротив, многие антиреалисты, отмечает Джеральд Кац, утверждают, что математическое знание не может быть знанием об абстрактных объектах. Абстрактные сущности непостижимы, считают они, поскольку мы не можем иметь контакта с тем, что не пребывает в пространстве-времени. Знание о физике явлений, зафиксированное в пространстве и времени опыта, не дает одновременно знания о процессах сознания. В этом проявляется классическое различие сознания и материи.

По мнению Мераба Мамардашвили, “вполне логичным обобщением всей этой ситуации является декартов вывод о дуальном характере “субъект–объектной структуры”, то есть о несводимости в ее рамках двух “субстанций” – мыслящей и протяженной” [105, с.17]. Эта проблема связана с углублением и расширением понятия математической истины. О подходе самих математиков к проблемам, возникающим в связи с этими вопросами, речь впереди. Заметим только, что если математическое знание опирается только на разум, то даже в этом случае оно ограничено условиями веры в математическое утверждение, условиями его истинности, а также условиями его мотивировки или оправдания. Основная догма математической идеологии основана на вере в то, что все измеримо, все может быть выражено в числах и адекватно переведено на язык математики. Вера в то, что математические сущности каким-то образом предшествуют математическим исследованиям и озарениям, разделяется большинством работающих математиков. Но какой смысл они вкладывают в ключевое слово “предшествуют”? Считают, как это делают платоники, что они образуют некоторый независимый от них мир, знакомство с которым дается особой формой “внутреннего зрения”, называемой интуицией, или же предполагают, что эти сущности отражают объективные законы, по которым построен мир как акта божественного творения или в результате естественной эволюции. Эта вера, связанная с природой математических объектов и характером математического творчества, опирается на разнообразный опыт работающих математиков. Это тот круг вопросов, опытным знанием которых обладают философски мыслящие математики. Поэтому в первую очередь следует опираться на их собственные свидетельства. Возможно, что именно в таком подходе содержится основной аргумент в пользу математического реализма. Даже рационалистические концепции признают существование врожденных идей.

С рационалистической точки зрения, понятия, необходимые для формирования абстрактных объектов, являются конституентами способности мышления или выводятся из таких понятий опять же с помощью принципов, определяющихся способностями разума. Один из способов сделать мир более понятным состоит в том, чтобы сделать его более искусственным, поскольку искусственные или формальные системы имеют тенденцию быть более понятными и предсказуемыми, чем естественные. Что в такой ситуации должен

делать “реалист”, верящий в математическую истину? Разумнее всего не связывать себя со всеми версиями врожденных идей, а опереться в практической работе на одну из них. Так и поступают многие математики, предпочитая объединение философского реализма и рационализма в научном познании. Рационализму эпохи Просвещения человечество обязано рождением современной науки и научного метода. Первым, кто сознательно сформулировал мысль о том, что математика должна быть использована как инструмент добывания философских истин рациональным путем, был французский философ и математик Рене Декарт. Он заложил основу научного метода, опирающегося на рациональное мышление, возможности которого были для него безусловны и очевидны. Хотя научный метод не исключает иррациональных компонент группового “научного поведения”, когда за истинное что-то принимается не потому, что для этого есть рациональные аргументы, а потому, что так принято делать в этой исследовательской группе или в научной школе, которой она принадлежит. Декарт продемонстрировал разницу между истинностью и правдоподобием с помощью своего метода правильного рассуждения. По его мнению, нет более безошибочного метода, чем тот, который основан на математике, поскольку только математикам удалось найти некоторые доказательства. Одним из основных вопросов, интересовавших многих мыслителей, был вопрос о значении метода. Начиная изучать то, что было уже исследовано математиками, Декарт поначалу не ожидал от этого никакой другой пользы, кроме той, что они приучат его ум питаться истиной, не довольствуясь ложными доводами.

Математик, исходя из нескольких либо очевидных, либо уже доказанных положений и следуя определенным логическим правилам рассуждения, приходит к выводам, в истинности которых ему трудно сомневаться. Изучая отдельные разделы математики, Декарт обратил внимание на то, что хотя их объекты отличны, тем не менее, их можно согласовать, исследуя только различные встречающиеся отношения в общем виде. Именно таким путем с помощью своего метода координат, заимствуя все лучшее из геометрического анализа и из алгебры, применяя последнюю к решению геометрических проблем, он создал то, что мы сегодня называем аналитической геометрией, которую правильнее было бы назвать алгебраической геометрией, если бы уже в наше время этот термин не приобрел бы совсем другой смысл. Среди математиков популярна точка зрения на эволюцию математики, согласно которой, “историю современной математики можно было бы условно начинать с того времени, когда “числа” и “фигуры” прочно объединились в идее координат” [109, с.6]. В теории познания Рене Декарт – признанный родоначальник рационализма и сторонник учения о врожденных идеях. Как автор идеи дуализма духа и тела, он размышлял над тем, как молодой рассудок усваивает взгляды на вещи, которые он не в состоянии понять. Человек приобретает некоторые представления еще до того, как его дух достигнет полной логической зрелости. Великий преобразователь современного естествознания сокрушался по поводу того, что человек не в состоянии

мыслить ясно с самого дня своего рождения, что он должен иметь воспоминания, предшествующие его зрелости.

С точки зрения теории познания одной из наиболее важных работ Рене Декарта является “Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках” (1637). Она была задумана как предисловие к его естественнонаучным трактатам, из которых наиболее известна “Геометрия”, где были изложены принципы аналитической геометрии. Его “Геометрия” преобразовала математические науки, в том смысле, что освободила геометрию от “господства частных и фигур” и сделала ее предметом общего исчисления. Но какова цена, которую должен заплатить всякий научный метод, делающий бесстрастными математиков, физиков или биохимиков? Как преодолеть присущую научному методу дихотомию, согласно которой, вырабатывая естественнонаучную стратегию познания, он уничтожает личный и социальный опыт, вследствие чего, обретенный навык может оказаться роковым для социального мыслителя. В “Рассуждении о методе” объясняется то, что позже стало называться методом картезианского сомнения. О философии, в первой части своего рассуждения, наряду с различными соображениями относительно других наук, Декарт говорил, что хотя в течение многих веков она разрабатывалась превосходнейшими умами, в ней до сих пор нет положения, которое не служило бы предметом споров и, следовательно, не было бы сомнительным. Поэтому, чтобы иметь основательный базис своей философии, он считал необходимым сомневаться во всем, в чем только можно сколько-нибудь усомниться. Во второй части “Рассуждений” Декарта излагаются основные правила его метода. Вместо многочисленных правил логики Рене Декарт для своего метода предлагает ограничиться следующими четырьмя правилами.

Первое – никогда не принимать за истинное ничего, что я не признаю бы таковым с очевидностью...

Второе – делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, сколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье – располагать свои мысли в определенном порядке, начиная с предметов простейших и легко познаваемых...

Последнее, четвертое правило состоит в том, что научные обзоры необходимо делать столь всеохватывающие, чтобы быть уверенным в том, что ничего существенного не пропущено. Даже если применение этих правил невозможно или затруднительно, все равно, считал он, следует принять какой-то порядок. Недостаточно иметь хороший ум, очень важно хорошо применять его – это одно из основных положений философии Рене Декарта. Он был замечательным математиком, поэтому придание философии некоторой определенности виделось ему в той методологии, которая была присуща алгебре и геометрии. С помощью предельно обобщенной формулировки проблемы Декарт использовал свой метод для определения сущности философии. По мнению немецкого философа Вильгельма Дильтея, гениальное своеобразие метода Декарта “состояло именно в приемах его осуществления”

[53, с.33]. Математические естественные науки опираются на допущения, содержащиеся в ряде очевидных понятий и положений, которые не принадлежат собственно отдельным областям математики. Только поняв их объективный и обязательный характер, можно придать соответствующему исследованию уверенность и построить на их основе конструктивный метод. Математика привлекала его больше всего твердостью и очевидностью своих основных положений, поэтому он удивлялся, что на таком прочном основании не возведено более величественного здания. Подобно тому, как математика начинается с простых и очевидных принципов-утверждений, то есть основополагающих аксиом, он счел необходимым тщательно исследовать все философские вопросы, признав истинными те идеи, которые наиболее ясны и свободны от внутренних противоречий. В отличие от алхимиков, искавших в материи объяснения свойств души, Декарт в XVII веке разделил дух и материю. Анализируя феноменологический мир, или мир явлений, он пришел к выводу, что свойства мышления нельзя рационально вывести из свойств материи. Метод Декарта состоял в поиске объективных законов, выраженных в математическом аппарате, соединяющем априорные знания и эмпирические данные.

Четкая математическая формулировка позволяет иногда ставить вопросы, связанные с образными характеристиками глубин сознания. Один из приверженцев квантовой теории сознания английский невролог Джон Эклз выступает в защиту дуализма, утверждая, что разум существует независимо от своего “физического субстрата”. Естественнонаучные возражения дуализму можно объединить в утверждении: “он нарушает сохранение энергии”. Ответ Эклза, хотя у него нет никаких доказательств, и мотивы обращения к квантовой механике при объяснении свойств разума сводятся к следующему аргументу: “Разум осуществляет свое влияние на сознание, “решая”, какие нейроны “выстрелят”, а какие нет. Пока вероятность сохраняется в мозгу, это осуществление свободной воли не нарушает сохранение энергии” [167, с.281]. Пытаясь преодолеть наметившиеся в современной математике “границы знаний”, математики, как и в прежние времена, надеются изобрести новые концептуальные и математические подходы к анализу математической сложности неклассических проблем. Только математики, вопреки широко распространенным теориям, всегда были убеждены в том, что Вселенная построена на математических принципах. Им хватило интеллектуальной смелости, чтобы преодолеть научные и религиозные контраргументы начала XVII века. О математическом методе Декарт отзывался как о более мощном инструменте познания, чем все остальные в человеческой деятельности, поэтому на его основе он и развивал новую философию науки. Когда-то первые философы не допускали к изучению мудрости людей, не сведущих в математике. Именно это и утвердило Декарта в подозрении, что они знали такую математику, которая весьма существенно отличается от общепринятой математики его времени. Кое-какие следы этой истинной математики он обнаруживает даже у авторов, живших пусть не в самую раннюю эпоху, но все же за много веков до начала XVII века.

Поскольку, по мнению Декарта, математика самая простая и легкая наука, в смысле достоверности и убедительности своих методов, то эти авторы, боясь обесценивания при ее всеобщей доступности, предпочитали показывать только результаты своей науки, удивляя остроумно доказанными на основе умозаключений истинами. Такой “методический прием” живуч и сегодня, хотя уже и по другим причинам. Философия Рене Декарта оказала решающее влияние на формирование стиля мышления, характерного для XVII века, в частности, на таких мыслителей, как Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц. Собственный вклад Декарта в математику сводится не столько к открытию новых истин, а в значительной мере к введению нового метода, который изменил всю методологию математики. Чувства во многих случаях обманывают нас, кроме того, от истинного познания нас отвлекает множество предрассудков. “Очевидно, мы можем избавиться от них лишь в том случае, – писал Декарт в “Первоначалах философии”, – если хоть раз в жизни постараемся усомниться во всех тех вещах, в отношении достоверности которых мы питаем хотя бы малейшее подозрение” [52, с.314]. Это право сомневаться было равнозначно духовной свободе или свободе выбора. Но, вглядываясь в глубочайшие тайны материи и постоянно сомневаясь во всем, мы, в конце концов, можем увидеть лишь наши собственные “удивленные лица”, глядящие на нас самих. В этом и состоит знаменитый “отрезвляющий парадокс”, что в сердце всего – вопрос, а не ответ. Тем не менее, Декарт считал необходимым усомниться во всем, что до сих пор считалось достоверным, даже в математических доказательствах. Причиной заблуждений философов может быть то, пояснял он, что они пытаются с помощью “логических дефиниций” объяснять простые и понятные вещи. Тем не менее, считая первичным свое положение “я мыслю, следовательно, я существую”, он не отрицал необходимости знать до него, что такое мышление, существование, достоверность.

Философия традиционно обсуждает сомнения в существовании мыслительных объектов, отвлекая внимание, возможно бессознательно, от принципиального для математиков вопроса: насколько осознанные для них в математическом рассуждении элементы представляют собой адекватные данные для систематической теории? В частности, годится ли для построения систематической теории, “видимой” через рассуждения, тот тип интеллектуальной деятельности, которым все так восхищаются? С точки зрения математики термин “существование” означает наличие объектов и понятий, обладающих определенными математическими свойствами. Например, в упоминавшейся “Геометрии” Декарта, широкое применение получило понятие переменной величины, выступавшей в двойной форме: как отрезок переменной длины и постоянного направления, то есть текущая координата точки, описывающей своим движением кривую, и как непрерывная числовая переменная, пробегающая совокупность чисел, выражающих этот отрезок. Это одно из проявлений дуализма математических понятий. Именно такой двойственный образ переменной обусловил взаимопроникновение геометрии и алгебры. Со сложными формализациями даже людей далеких от математики

заставляют работать современные компьютеры, поскольку они строго следуют букве этих формализаций. Поэтому компьютерные аналогии помогают иногда проследить взаимосвязь, с одной стороны, между формализуемым и неформализуемым, а с другой, по-новому взглянуть на фундаментальную философскую проблему соотношения веры и сомнения с точки зрения рационального мышления.

Первые формы рационального мышления содержательно совпадают с мифологическими фантазиями, поскольку они, по существу, рассматривают одни и те же вопросы, которые различаются не формой их постановки, а способом их разрешения. До-рациональное или до-научное познание приписывает числам мистические силы, а сама математика была полна мистического значения и связана со всеми тайнами мира. При попытке отыскать в истории рационального познания ответы на вопросы о природе рациональности мы, в лучшем случае, находим лишь подтверждения или опровержения собственных априорных представлений о ней. Начиная с неверного толкования одним из основоположников новой научной методологии, английским философом XVII века Фрэнсисом Бэконом истинных перспектив науки, многие исследователи соблазнились благостными перспективами грядущего нового “века рациональности”. Провозгласив целью знания увеличение власти человека над природой, Бэкон полагал, что достичь эту цель может лишь наука, постигающая истинные причины явлений с помощью рационального переосмысления опытных фактов. Однако это представление о рациональности было в значительной степени искажено и стало отождествляться с логичностью. Заметим, что среди важнейших проблем математики наступившего столетия авторитетный американский математик Стивен Смейл назвал следующую проблему интеллекта и рационального знания: “Каковы пределы интеллекта, как искусственного, так и человека?” [152, с.297]. Попытка вывести критерии рациональности исходя только из внешних факторов, таких, например, как общественные и культурные традиции, определяющие экстерналистский подход, может привести к логическому кругу. Каким бы ни было множество внешних факторов, используемых при определении рациональности, оно само, в свою очередь, тоже требует рационального анализа, как требуют анализа и связи между исходными факторами и определяемыми с их помощью принципами рациональности. Подобного рода затруднения побуждают некоторых философов науки вообще отказаться от содержательного определения рациональности, объявляя это понятие псевдометодологическим. Поэтому вместо понятий “рациональный метод” или “рациональное суждение” многие исследователи предпочитают говорить о целесообразности, непротиворечивости, полноте и других, лучше определяемых терминах.

Немецкий философ Иммануил Кант понимал “рацио” как что-то, что является пониманием, хотя это нельзя высказать в наглядных терминах. В философском контексте “рацио” – это продукт некоторого духовного воздействия, не являющийся ни наглядным, ни эмпирическим. Определенная часть трудностей, связанных с проблемой “дискурсивное – интуитивное”, была

резюмирована Иммануилом Кантом в его знаменитых “антиномиях чистого разума”. Анализируя антиномии разума, например, противоречие между причинностью и свободой, Кант обнаружил пределы рационального мышления. В отличие от Декарта, он пришел к выводу, что определенные истины, находятся за пределами рационального понимания, исследуя содержимое априорного знания. Продолжая аристотелевскую традицию, он определил специфические априорные формы и категории, например, пространство и время, единство и множественность. “В критике рационального мышления Кант парадоксальным образом подтвердил рациональный, научный подход к добыванию истин, – пришел к выводу физик-теоретик Л.И. Перловский, – происхождение антиномий разума, утверждал он, следует искать в сложной природе нашего априорного знания” [134, с.195]. Следуя Канту, надо принять то, что имеются определенные цели рационального исследования, состоящие в достижении истины и понимания. Например, определенный стиль доказательства новой теории принимается математиками потому, что данный образец доказательства, согласно мнению авторитетов в этой области математики, соответствует задаче получения истинных следствий и согласуется с современным уровнем знаний. Античный рационализм благодаря своей метафизической основе привел к выявлению трудностей дискурсивного (или логического) мышления, связанных с апориями Зенона Элейского и антиномиями типа парадокса лжеца. Если проследить судьбы античной апорийности и контроверзы “рациональное – внерациональное” на протяжении последующих эпох, то можно заметить, что от парадокса Эпименида “Лжец” они ведут к знаменитой теореме Гёделя о неполноте формализованной арифметики, а от апорий Зенона к уяснению двойственных сущностей заключенных в ней трудностей.

Можно даже говорить о “парадоксе Зенона в области логических формул”. Суть трудностей знаменитых апорий Зенона, например, Ахиллес и черепаха, состоит в том, что, если мы ограничимся рациональными числами, то движение будет невозможно. Одну из принципиальных точек зрения на эту проблему можно сформулировать так – движение возможно только по континууму. Если из вещественной прямой выбросить какую-нибудь точку, то в таком некомпактном множестве, не являющемся также континуумом, можно реализовать парадокс Зенона в том смысле, что Ахиллес действительно не догонит черепаху. Отсюда, в частности, вытекает необходимость присоединения к рациональным точкам всех предельных, то есть иррациональных, точек. На аналогии такого рода в логике обращал внимание Джон фон Нейман. Он отмечал, что математик, обращаясь к логике, испытывает определенное неудобство в том, что вся она “крутится” вокруг дискретных структур. Математику гораздо легче и проще в каких-то ситуациях, когда он видит что-то непрерывное, точнее более континуальное. Он даже не исключал в будущем такое расширение логики, когда она будет носить менее дискретный и более непрерывный характер. Эти старые проблемы не позволяли различным поколениям философов, логиков и математиков игнорировать внерациональные аспекты знания. Проблемы “антиномичности – апорийности”

и их философские решения, представленные в рамках разных социокультурных реальностей, на протяжении веков “сосуществовали и взаимодействовали” с контрверзой “рациональное – иррациональное” [19, с.72]. Необходимым признаком рациональности является адекватное отношение к миру, хотя целесообразные решения могут иногда лишь создавать иллюзию рационального поведения там, где, возможно, имеют место другие виды отражения реальности. Математические выводы стали общеобязательными для выдающихся мыслителей Древней Греции, когда возникла необходимость в строгой аргументации и математика перестала быть связанной с определенной общественной или философской системой.

С другой стороны, хотя Платон и был хорошо знаком с наукой своего времени, не считаясь, однако, самостоятельным деятелем в области математики, так как он в первую очередь был философом, именно идеалистический характер его философии благотворно влиял на развитие математики. На современный кризис мировоззрений ученый и философ А.А. Любищев, которого считают продолжателем линии Платона в возрожденной им философской полемике, обратил внимание еще до того, как его осознано общественное мнение. Материализм, требующий, чтобы математика ограничивалась отображением реального мира, непродуктивен потому, что наши знания о реальном мире не только далеко не исчерпаны, но и, возможно, вряд ли когда-нибудь станут такими. Поэтому, не доверяя строгости разума, материализм ограничивает свободу математического мышления. “Настоящий рационалист, – писал А.А. Любищев, – не признает никаких догматов... Поэтому наилучшим наименованием рационализма в этом смысле был бы старый тургеневский нигилизм” [102, с.97]. Абстрактные математические понятия, например, хотя бы бесконечные множества, понимаются как самостоятельные сущности в идеальном познании. Вот это и есть платонизм в математике. Можно предположить, что понятие рациональности элиминируется, то есть исключается или устраняется в духе “бритвы Оккама” – важнейшего принципа в науке, суть которого в том, что лучшее объяснение какого-либо явления обычно самое простое. Однако понятия-заменители сами нуждаются в опоре на рациональные представления. Кроме того, если теория настолько сложна, что мало кто может понять ее, то, какое удовлетворение от нее могут получить остальные? Возможно также, что многие ученые продолжают верить в принцип “бритвы Оккама” лишь потому, что самые простые теории являются единственными, которые могут быть поняты их “скромными” умами, допускающими минимальную онтологию. При такой трактовке этого принципа острие “бритвы Оккама” нависает над основной задачей науки – поиск тех ниш реальности, которые позволяют себя познать. Например, может быть компьютеры будущего не будут подвержены ограничению этого принципа.

Уильям Оккам, живший в XIV веке, стоял у истоков развития научного метода и номиналистических взглядов, согласно которым общие концепции (или универсалии) служат лишь названиями для классов схожих эмпирических фактов. С точки зрения современных философских и математических теорий

интеллекта, номиналистическое мировоззрение, не опирающееся на априорное содержание мышления, мешает созданию адекватных математических концепций, поскольку знания границ наших собственных знаний должны оставаться неполными. Традиционный рационализм объявлял основным источником знания интуицию. Например, несмотря на то, что большинство математиков мало что знают об аксиомах арифметики, все они сходятся во мнении относительно того, какие рассуждения о свойствах натуральных чисел следует признать доказательными, а какие могут привести лишь к гипотезам или ошибкам. Даже, когда теория вроде бы основательно построена на аксиомах, в ее рассуждениях могут быть обнаружены пробелы, не отраженные в аксиомах, но не вызывающие разногласий относительно их справедливости. Так немецкий математик Мориц Паш, один из первых исследовавший аксиоматические основы геометрии, только в XIX веке ввел “аксиомы порядка”, отсутствовавшие в геометрии Евклида и используемые ранее без всякого обоснования. Пытаясь объяснить такого рода явления, обычно приходят к понятию интуиции, связывая ее с “непосредственным постижением истины” или с математическим творческим мышлением. Даже если роль интуиции иногда переоценивалась, нельзя отрицать, что она все же является источником многих формальных истин нашего знания. Американский философ математики Филипп Китчер считает, что теория рационального в математике должна развиваться через выявление принципов, лежащих в основе интуитивных суждений, что может прояснить рациональную связь различных математических практик.

Как бы ни оценивались в целом математические теории, пусть полезные или даже бесполезные, отдельные группы математического сообщества имеют собственное оправдание того направления, которому они следуют. “Когда мы рассматриваем рациональность в математике и в науке как проблему соответствия средств целям, тогда становится очевидным, – утверждает Китчер, – что суждения о рациональности крайне неопределенны” [80, с.18]. В качестве новой философии математики, более соответствующей современному состоянию математики, он выдвигает математический натурализм, как реакцию на преобладание формалистского подхода, отделявшего математическое знание от опытного. Поэтому в качестве основного понятия этой философии математики было взято понятие математической практики, состоящей из пяти элементов: язык, используемый математиками; множество утверждений, уже принятых математиками; множество вопросов, еще не решенных, но важных для теории; множество рассуждений, используемых для оправдания принятых положений, и множество взглядов на различные методологии или классификации математических дисциплин. Тогда рациональные переходы от одного состояния математической практики к другому состоянию будут характеризовать качественный рост математического знания. Математических натуралистов тоже можно отнести к платонистам, хотя известны и некоторые вполне обоснованные причины неудовлетворенности таким подходом. Например, необъяснимым остается то, каким способом наше сознание дает нам веру в существование “непосредственно непознаваемых сущностей”. Наше

познание реальности свидетельствует о невероятном переплетении в человеке разумного или рационального с иррациональным началом.

Противопоставление рационализма и иррационализма имеет много различных смыслов. Первый фундаментальный смысл идет от математического образа соотношения рациональных и иррациональных чисел. Мыслительные процессы с мгновениями гениальных озарений трудно поддаются рациональному объяснению, что можно пояснить на примере построения и обоснования иррациональных чисел. Идея окончательности математического результата противоречит современной теории познания, акцентирующей внимание на относительности результатов человеческого мышления. Такого рода представления идут от сопоставления математики с физикой, а также от рационалистических и априорных взглядов на саму математику, игнорирующих, вообще говоря, математическую деятельность по конструированию моделей, позволяющих устанавливать связи, поддающиеся проверке с помощью конечных процедур. Тем не менее, критика законов и принципов классической логики привела в итоге к феномену “логической континуальности”. Именно поэтому, считает логик А.С. Карпенко, возникает вопрос: “Является ли логическое мышление человека дискретным или континуальным?” [76, с.15]. Ответ на этот вопрос зависит от того, что понимается под логической системой и в рамках скольких систем мыслит человек. Поиску ответа на этот вопрос способствуют доказательные математические рассуждения, которые являются составными элементами развивающегося человеческого мышления и поэтому отражаются в самой логике.

Мысль становится “живой” в тот момент, когда к ней прибавляется дополнительное усилие, то есть нечто такое, что уже не является мышлением и даже уже не логическое, однако мы чувствуем ее истинность или правоту без каких-либо оправданий. Когда мы оперируем с иррациональными числами в рамках математических формализмов, то они кажутся вполне естественными, но когда мы смотрим на их странности непосредственно, то они иногда кажутся невыносимыми. Рассмотрим, например, самые знаменитые иррациональные числа $\sqrt{2}$, π и e . Используя доказательство от противного, древние греки сумели доказать, что число $\sqrt{2}$ не представимо в виде обыкновенной дроби. Раннее все числа, с которыми люди имели дело, были представимы как целые числа или обыкновенные дроби, но иррациональные числа игнорировали традиционное представление чисел. Не существует иного способа описать число, равное корню из 2, как записать его в виде $\sqrt{2}$. Любая попытка записать $\sqrt{2}$ не позволяет получить ничего, кроме приближения, например, такого как 1,414213562373... С точки зрения математики, но не здравого смысла, тривиально утверждение о том, что произведение двух иррациональных чисел может быть равно рациональному числу. Действительно, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, хотя доказательство того, что иррациональное число в иррациональной степени тоже может быть рациональным числом уже не столь явно математически конструктивно. Если бы $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ – было рациональным числом, то искомая пара

иррациональных чисел была бы найдена, пусть оно иррациональное, то тогда его степень $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ – рациональное число.

Приведенный в этом примере способ доказательства – разбор случаев – был известен уже в XIX веке, хотя в то время еще было неизвестно, является ли число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рациональным. Только в 30-е годы XX века было дано довольно сложное доказательство того, что это число иррационально. В рассмотренных примерах мы по существу не пользовались никакой математической техникой. На первый взгляд, более простой следующий вопрос: “является ли число $2^{\sqrt{2}}$ рациональным или иррациональным?”. Он известен под названием “7-й проблемы Гильберта”. Хотя она была поставлена Давидом Гильбертом в более общем виде, сам он считал, вопрос о числе $2^{\sqrt{2}}$ в ней, можно сказать, наиболее показательным. Ответ на этот вопрос удалось найти не сразу, а лишь спустя три десятка лет, еще при жизни Давида Гильберта, русскому математику Р.О. Кузьмину. Он доказал иррациональность числа $2^{\sqrt{2}}$. Непонимание математики происходит иногда оттого, что в ней пытаются найти что-то сверхъестественное, а надо искать именно естественное, не только вне себя, а что-то и в себе, чего мы, несмотря на естественность математики, не понимаем. Нестандартные примеры не только стимулируют творческую активность, но и дают нам прочувствовать сущность математики. Есть какие-то вещи, которые вторгаются в нашу жизнь как бы в двойственном виде, то есть необъяснимые одним лишь только мышлением, например, отдельные лица, события, темнота, страх или тишина.

Например, сложные нефинитные доказательства лишь идеальны и как таковые не имеют смысла, однако ими можно манипулировать абстрактно, а именно точно так же, как i не является вещественным числом, но с ним можно оперировать алгебраически, свободно используя формальный математический факт, что $i^2 = -1$. Некоторые основные математические понятия, в том числе мнимые числа, тоже трудно объяснить для неподготовленного ума и чтобы восполнить пробелы нашего мышления, мы иногда нуждаемся в другой более глубокой уверенности, чем рациональные объяснения. Математические утверждения, с точки зрения здравого смысла, изобилуют “бессмыслицами” и “нелепостями”, в которых в большинстве случаев повинна бесконечность. Поэтому до работ по обоснованию математики высказывались мнения, что если даже новое понятие вводится без риска получить противоречие и даже если это может быть доказано, то и тогда оно не считалось достаточно оправданным. Такого рода возражения в свое время выдвигались против комплексных чисел. Многие ученые, в том числе и Блез Паскаль, не верили сначала в “отрицательные” числа, а позднее “мнимые” числа также не признавались за реальный объект. Даже если из-за них не возникает никаких противоречий, их введение все равно представлялось незаконным, так как мнимых величин все-таки как бы не существует. Сверх доказательства непротиворечивости наибольший интерес должен представлять лишь успех проводимых формальных манипуляций и рассуждений, являющийся в математике высшей инстанцией полезности и убедительности любого математического понятия.

Например, для определения показательной функции комплексного переменного $z = x + iy$, где i – мнимая единица, $i^2 = -1$, и которую обозначают e^z , существует несколько технически разноплановых математических определений. Показательную функцию можно определить с помощью равенства $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, рассматриваемого для всех комплексных чисел z .

Другой способ – это определение показательной функции как единственного решения задачи Коши для дифференциального уравнения $df(z)/dz = f(z)$, удовлетворяющего начальному условию $f(0) = 1$, имеющего вид $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$. На понимании того, что сумма функционального ряда также является функцией, основано определение показательной функции с помощью ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n / n!)$, который для каждого комплексного z сходится абсолютно и его сумма равна $e^x(\cos y + i \sin y)$. По аналогии с определением показательной функции действительного переменного, полагают, что $e^z = \lim(1 + z/n)^n$ при $n \rightarrow \infty$. Этот предел существует для всех z и равен $e^x(\cos y + i \sin y)$. Наконец, саму показательную функцию $f(z) = e^z$ можно задать аксиоматически, предписав ей следующие свойства: функция f однозначно определена для всех комплексных чисел z , причем для вещественного $z = x$ функция f также принимает действительные значения и $f(1) = e$; для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство $f(z_1+z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$; функция f дифференцируема в точке $z = 0$. Возможно, комплексные числа, играющие важную роль во всей понятийной системе квантовой механики, заслуживают с этой точки зрения наиболее пристального внимания. Двойственность и противопоставление реального и идеального выражена даже в этимологии терминов, связанных с комплексными числами, а именно, в названиях “действительная” и “мнимая” часть. Давид Гильберт, предложивший современную концепцию идеи существования в математике, привлекал для ее иллюстрации формальное выражение “ $\sqrt{-1}$ ”. Хотя математически не существует вещественного числа, квадрат которого равен -1 , но если удастся доказать, что некоторое формальное понятие обладает свойствами, которые с помощью конечного числа умозаключений никогда не приведут к противоречию, то он считал, что его существование доказано. С такой точки зрения доказательство непротиворечивости аксиом арифметики вещественных чисел равносильно доказательству математического существования понятия вещественных, в том числе иррациональных, чисел, или континуума.

Многие математические объекты содержат в себе одну из фундаментальных математических двойственностей – конечное и бесконечное. Чтобы обнаружить математические объекты, которые как бы указывают на пробелы в казуальности нашего мышления, несомненно, нужна природная наблюдательность и философско-математическая смелость восприятия. Математики уже сталкивались с такими феноменами в обосновании своей науки, для понимания которых они нуждаются в какой-то другой более глубокой уверенности. Тогда они обращались к религиозным точкам зрения, к божественной и трансцендентной сущности. Математиков иногда упрекают в том, что они присвоили себе право решать, какие утверждения о бесконечных

множествах справедливы, поставив себя на место, с которого эти множества можно созерцать. В качестве наиболее впечатляющего примера подобной смелости можно привести работу Георга Кантора над теорией бесконечных множеств, проблемы которой так и не удалось полностью решить в прошедшем веке науки. Антитеза актуальной и потенциальной бесконечности поставила перед математическим естествознанием того времени наряду с логическими и философскими также и богословские проблемы. Согласно одной из точек зрения, “к церковным авторитетам Кантор относился так же, как к другим мыслителям, а его религиозность сказывается разве что в форме большей внешней почтительности к ним, вроде отнесения к ним эпитетов “святой”, “великий” и т.п.” [113, с.231]. Как бы то ни было, ни современники Кантора, ни математики XX столетия, в целом, не проявили интереса к канторовской “теологической подкладке” теории множеств. Следует отметить, что в самой теологии тоже сложились две традиции, или два метода, которые сознательно противоречат и вместе с тем дополняют друг друга. Два дополнительных богословских метода признают равно истинным то, что Бог существует, и то, что Он не существует. Это состояние чистой потенциальности. Однако теологические мотивировки не удалось устранить из математики окончательно. Они были устранены из сознания, но тем прочнее они обосновались в подсознании. Но, несмотря на всевозможные философско-теологические предубеждения и возражения, необходимость оперирования с бесконечностью в различных формах, в том числе и в форме актуальной бесконечности, появилась с самого начала возникновения древнегреческой математики.

Продемонстрируем простейшую конечно-бесконечную ситуацию на примере только одного математического объекта, доступного пониманию студентов младших курсов, а именно – степени с произвольным показателем, a^b , где a и b – произвольные комплексные числа. Это выражение определяют с помощью многозначной логарифмической функции, то есть $a^b = e^{b \operatorname{Ln} a}$. Так как логарифм комплексного числа имеет бесконечное множество значений, то и выражение a^b имеет бесконечное множество значений. Однако в частных случаях среди них может быть только конечное число различных значений, если b – дробное число, или они могут все совпадать, если b – целое число. Удивительно то, что с мнимыми или еще какими-либо “невозможными” величинами можно производить вычисления, дающие осязаемый, точнее действительный, результат. Совершенно неожиданный для непосвященных факт состоит в том, что все значения выражения i^i – это действительные числа, $i^i = e^{i(\operatorname{Ln} i)} = e^{-((\pi/2)+2k\pi)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и, например, для $k = 0$ имеем, что $i^i = e^{-(\pi/2)} \approx 0.2\dots$. Последний пример встречается в, упоминавшейся выше, 7-й проблеме Гильберта. Поскольку i^i действительные числа, то можно задать такой совершенно неожиданный, с точки зрения их вида, вопрос: являются они рациональными или иррациональными? В проблеме Гильберта как раз и записано выражение i^{-2i} , которое равно e^π . Вот ее полная формулировка: доказать, что “степень α^β при алгебраическом основании α и алгебраическом иррациональном показателе β – как, например, число $2^{\sqrt{2}}$ или $e^\pi = i^{-2i}$ – есть

всегда или трансцендентное число, или по крайней мере иррациональное” [43, с.417]. Давид Гильберт выражал надежду на то, что решение этой и аналогичных проблем приведет к новым методам и новым точкам зрения на сущность понимания специальных иррациональных и трансцендентных чисел.

Только в 1934 году высказанную Гильбертом общую гипотезу о трансцендентности чисел вида α^β независимо доказали А.О. Гельфонд и Теодор Шнайдер. Именно рациональности, сильно связанной с традициями науки на протяжении последних трех столетий, мы обязаны тому, что, в конце концов, находим понимаемое объяснение чего-либо. Поразительно, что в столь строгой и рационалистической науке как математика, залогом точности могут стать операции с мнимыми и иррациональными числами. Одно из равенств, тривиальное с математической точки зрения, содержит в себе важнейшие трансцендентные иррациональные числа e , π , а также действительную, мнимую единицы 1 , i и число 0 – это пять фундаментальных математических констант, каждая из которых была введена в математику в особом специфическом контексте, то есть это равенство вида $e^{i\pi} + 1 = 0$. Академик-математик А.Н. Крылов видел в этой формуле символ единства всей математики, так как -1 представляет в ней арифметику, i – алгебру, π – геометрию, e – математический анализ. В понятийном арсенале математики мнимые и иррациональные величины апеллируют к методам, которые на первый взгляд выглядят “авантюжными” и “фантастическими”. Например, математическая полнота требовала ответа на вопрос: “Чему равен квадратный корень из -1 ?” Чтобы ответить на этот вопрос итальянскому математику XVI века Рафаэлю Бомбелли пришлось ввести новое “число” i , определив его просто как ответ на этот вопрос, полагая $i^2 = -1$. Это не было малодушной попыткой избежать решения проблемы по существу. Решение Бомбелли сходно с тем, как были введены отрицательные числа индийскими математиками, определившими “число” -1 как ответ на вопрос: “Что получится, если от нуля отнять единицу?” И все же в повседневном опыте нет ничего, что подкрепляло бы существование мнимого числа. Поэтому немецкий математик XVII века Готфрид Лейбниц считал мнимое число удивительным прибежищем Божественного духа, нечто между бытием и небытием.

На начальных ступенях обучения очень трудно дать всему этому верное объяснение, поскольку математика – это особый мир, в котором надо довольно долго прожить по эту сторону строгих границ разума, чтобы прочувствовать все, что в нем происходит. Мир математики отличается от мира, в котором мы живем. Значимость ее результатов определяется будущим науки. У нас нет рациональных способов заглянуть в него, поскольку обращения к экспертам включают в себя иррациональный элемент. Значение математики для физики далеко не все оценивают правильно, считая, что она дает только средства для вычислений. В этом случае упускают из вида, что когда создана удачная математическая модель физического явления, то математическая структура этой модели может открыть новые стороны исследуемого явления. Поэтому иногда вполне естественно думать о физических величинах на языке

математических объектов, интерпретируя сходные эффекты на языке одной и той же модели. Намеренно обостряя ситуацию и сравнивая математику с философией, которая злоупотребляет придуманной терминологией, американский физик-теоретик Юджин Вигнер назвал математику наукой изощренного манипулирования понятиями и правилами, “придуманными как раз для этой цели”. Главное ударение в этой фразе он ставит на изобретении понятий. Математики сами создают понятия, которые они изучают, поступая так же, как изобретатели. Но когда они изучают введенные понятия, формулируют теорему и пытаются обосновать или доказать свои утверждения, то они поступают как открыватели.

Если бы математики формулировали свои теоремы только на языке понятий, уже содержащихся в исходных аксиомах, то они со временем исчерпали бы все наиболее содержательные и нетривиальные теоремы. Наиболее яркими примерами абстрактных математических понятий являются, например, такие математические объекты, как комплексные числа, измеримые множества, гильбертовы пространства, с помощью которых математики получили немало выдающихся результатов. Но вряд ли кто-либо из выдающихся математиков старался так обосновать свою науку и включить ее в общепризнанную философскую систему, как немецкий математик и философ Георг Кантор. Ради этой цели он выполнил обширное историко-философское исследование, целиком оправданное, поскольку его исследования касаются таких методологических категорий, как бесконечность и континуум, которые со времен античности были предметом философской рефлексии. Исходной философской позицией концепции Кантора, даже с учетом необходимых уточнений, был платонизм. Возможно, что Кантор был последним крупным представителем платонического мышления в математике. Все программы обоснования математики, так или иначе, восходят к Кантору как некоему первоисточнику, хотя и непременно критикуют его. Трудности обоснования, в конечном счете, восходят к общему источнику – идее бесконечности. В современной математике появились результаты, например, теорема Геделя о неполноте, которые дают основание для пересмотра прежних взглядов на рационализм, однако подавляющее большинство исследователей придерживается традиционных взглядов на рационализм, согласно которым разума человека достаточно для познания мира.

Поэтому, современная методология математики стремится не только добиться большей ясности в понимании этих трудностей, но и пытается разобраться в вопросе о том, в чем же заключаются истинные истоки той необъяснимой мощи, которую несет в себе идея рационализма. Важнейший вопрос, который задавал себе Георг Кантор, касался онтологии, то есть способа существования введенных им множеств и трансфинитных чисел. Бесконечные множества обладают уникальным свойством: они могут быть равномощны своим собственным подмножествам. Это удивительное свойство мешало многим математикам до Кантора. Оно удерживало многих от того, чтобы рассматривать бесконечные множества как завершенные математические

объекты. Это и сегодня один из основных вопросов философии обоснования математики. В вопросах научной методологии математики Кантор частично отказывался от платонистской точки зрения. По его мнению, каждое математическое понятие “несет в себе” необходимые коррективы, то есть ограничения, несовместимые с платоновским учением об идеях. Если математическое понятие неплодотворно или нецелесообразно, то оно довольно скоро выявит свою математическую ненужность и затем от него откажутся из-за его бесполезности в применениях. Но с платоновским миром идей предикаты типа “плодотворно” и “неплодотворно” несовместимы. Для математиков их смысл выясняется в человеческой деятельности, включающей математическую практику. Например, комплексные числа можно задать как “пары вещественных чисел” таким образом, что правила операций с парами чисел приводят с помощью мнимой единицы к тем же результатам, что и “обычные” операции.

Существует другой способ введения комплексных чисел, подобный конструкции поля целых чисел по модулю простого числа n . Комплексные числа появляются при попытке решить уравнение $x^2 + 1 = 0$, поэтому основная идея состоит в том, чтобы в кольце многочленов, содержащем действительные числа, рассмотреть сравнения по модулю $x^2 + 1$. Этот многочлен прост в кольце многочленов с действительными коэффициентами, то есть его нельзя разложить на множители. Хотя математически это более сложная конструкция, тем не менее, она снимает покров таинственности с комплексных чисел, которые несправедливо, по отношению к действительным числам, называют мнимыми. Заметим также, что правила обращения с иррациональными числами, как бесконечными последовательностями, аналогичны правилам действия с рациональными числами. Хотя последовательности чисел – это далеко не тривиальные математические понятия, математики выбирают именно их из-за удобства манипулирования с ними, по сравнению, например, с дедекиндовыми сечениями. Свойства действительных чисел, состоящих из рациональных чисел и, определяемых с их помощью, иррациональных чисел, являются тем фундаментом, на котором строится все здание современного математического анализа. Кроме того, переход на новый уровень абстрактного обеспечивает общность и единство математического языка. Например, от конкретных числовых совокупностей – вещественных и комплексных чисел – приходят к общему понятию поля, а от множеств функций и бесконечных последовательностей приходят к понятиям гильбертова и банахова пространства и еще более общим понятиям метрического и топологического векторного пространства.

Не касаясь глубокой и математически сложной темы, – каким образом иррациональные числа можно понимать как “числа”, заметим только, что последних, составляющих множество мощности континуума, гораздо больше счетного множества рациональных чисел, и что иррациональные числа вовсе не “неразумные” в буквальном обозначении, а просто другие, довольно сложные для разума, понятия. Поэтому другой смысл иррационализма состоит в его

обращении к интуиции и подсознательным способностям человека. Наконец, апелляция к сверхчеловеческим и мифическим сущностям – это тоже довольно распространенный вид иррационализма. Бесспорные истины встречаются, наверное, только в математике, доступной для большинства, тогда как в естественных и общественных науках можно обнаружить как рациональные, так и иррациональные явления. Размышляя на философские темы, направленные на расширение мировоззренческих горизонтов, В.В. Налимов спрашивал: “Наука – рациональна или иррациональна?”. Наука рациональна в том смысле, что она “верит в существование всеобщей закономерности, поддающейся логическому раскрытию”, но, с другой стороны, наука иррациональна в том смысле, что она “опирается на озарение – творческие вспышки, осуществляющиеся на дологическом уровне мышления”, а в глубинном мышлении ее опорой могут стать и “абстрактные математические структуры” [120, с.22]. Поэтому в научной деятельности рациональное неотделимо от иррационального, при этом, как и во всякой другой деятельности возможен перенос в ту или другую сторону.

Чем сегодня является философия математики, которая по сложности рассматриваемых проблем сопоставима с современной философией физики? Иммануил Кант утверждал, что в любом частном учении о природе можно найти науки в собственном смысле слова лишь столько, сколько имеется в ней математики. В соответствии с классическими представлениями, сформировавшимися еще в античности, наука не должна содержать никакой примеси заблуждений, то есть подлинное научное знание должно быть фундаментально обосновано. При исследовании истины можно выделить следующие три этапа: первый – открытие истины, когда ее ищут, второй – ее доказательство, когда ею обладают, и последний третий – избавление от заблуждений, когда она, наконец, подвергается тщательной проверке. Фундаменталистская парадигма ориентировалась на “принцип достаточного основания”, когда к фундаменту, на который могла бы опираться система научных знаний, предъявлялись жесткие требования абсолютной достоверности и надежности. В соответствии с классическими представлениями научное знание должно было быть независимым от социокультурных условий их формирования и определяться только самой изучаемой реальностью. Представление о научности, воплощенной в математическом знании, нашло наиболее полную и адекватную реализацию в логическом построении “Начал” греческого математика Евклида, жившего в Александрии. Его геометрический метод оказал значительное влияние на всю философскую мысль. С другой стороны, Евклиду было не по силам разобраться в понятии “математической бесконечности”. Оно полностью отсутствует во всех тринадцати книгах его “Начал”, хотя, говоря, к примеру, о точке на прямой или о точке пересечения двух прямых, интуитивно рассматривали прямую как множество точек.

Возможно, именно эти проблемы обусловили двусмысленное положение пятого постулата в формальной структуре его геометрии. Тем не менее, несмотря на неясности этого постулата, он предпочел пренебречь некоторой

“апорией”, создав тем самым прославившую его систему, пусть даже с современных позиций неполную. В истории математики такие ситуации встречались и в дальнейшем, поскольку беспокойство насчет “абсолютной определенности всей математики” имеет сравнительно недавнее происхождение. Рене Декарт, формулируя свои представления о научности, полагал, что достоверное знание достижимо посредством интеллектуальной интуиции и дедукции. Несмотря на его “интуитивизм”, рационализму “*mathesis universalis*” Декарта противостоял “религиозный фон” дедуктивной теории Паскаля. Подобной двойственностью отмечены различные проекты “универсальных языков”, разрабатывавшиеся в европейской философской мысли XVII–XVIII столетий. Что касается знаменитой “программы Лейбница”, то его универсальный метод предполагал соответствующее “логическое наполнение”. В своей программе “нового философского метода” Лейбниц пошел дальше, чем кто бы то ни был до него. До конца своей жизни он был занят выработкой новой общей логики как наиболее надежного основания конструктивного метода. Готфрид Лейбниц, один из создателей современного дифференциального исчисления, подчеркивая превосходство математического типа научности, по его собственному признанию был очарован “математическими сиренами”.

В течение долгого времени философы науки принимали “лейбницианский идеал”, состоящий в том, что все научные дебаты могут быть беспристрастно разрешены с помощью соответствующих правил доказательства. Кроме того, благодаря успехам эллинской математики, в сознании математиков уже не существовало опасности разрыва между доказательством и конструктивным построением. Однако исследования таких математических объектов, как многомерные континуумы, бесконечные множества, алгебраические категории и функторы показало, что двуединый процесс конструирования и обоснования абстрактно-рассудочных понятий не схватывается единым видом математической интуиции, например, интуиции натурального числа. “Постгёделевская парадигма обоснования математики отвергла кантовский догмат о существовании “непогрешимой” интуиции, – подчеркивает философ математики В.С. Лукьянец, – а вместе с ним и кантовский критерий математической достоверности” [101, с.68]. Никакой вид математической интуиции, ни арифметической, ни геометрической, ни алгебраической, ни теоретико-множественной, ни категорной не является абсолютно непогрешимым. Поэтому для математического рассуждения характерна абстракция “отчуждения”, когда мыслительный процесс на некотором этапе своего развития сам становится объектом исследования. Например, если мыслить о натуральных числах в терминах истинных высказываний, то тогда теория множеств сводима к арифметике в том смысле, что для некоторой непротиворечивой формальной системы теории множеств можно найти такой перевод, при котором все теоремы этой системы обращаются в истинные арифметические высказывания.

Подобного рода методологические трудности обоснования математики удалось преодолеть грекам и поэтому они постепенно стирались в

мировоззрении математиков последующих поколений. Это косвенно способствовало тому, что в математику Нового времени были смело введены числа и их функции, а в доказательствах появились новые средства построения математических объектов, не сформулированные явно. Наука Нового времени, включающая все, что достойно быть предметом свободного и методического мышления, принципиально отличается от университетской схоластики гуманистов Возрождения. Порядок обучения в университете в духе антично-христианской культурной традиции предполагал обстоятельное знакомство с произведениями античных и христианских авторов, включая умение комментировать их и толковать. Хотя мыслителям Нового времени и тесно в рамках университетской схоластики, они не одержимы манией разрушения прежней системы образования, а отдавая ей должное, предпочитают работать самостоятельно в добровольных содружествах искателей нового знания. И в течение нескольких веков Европа совершила такой научный и технологический переворот во всех сферах человеческой деятельности, равного которому трудно найти в ближайшей истории человечества. Стремительное развитие эмпирической науки в Новое время способствовало становлению науки как социально организованного института.

Представления рационалистов Нового времени о научности, ориентированной на математику, связаны с такими ее характерными чертами как логическая ясность, дедуктивный характер ее теоретических построений, непреложность выводов и их соответствие основным посылкам, сформулированным в аксиомах. Дедукция – это логический вывод, с необходимостью вытекающий из посылок, то есть опосредованное знание, а интуиция – это знание непосредственное. С точки зрения Рене Декарта, интуиция не только определенного рода мистический феномен, но и интеллектуальный. Математики до сих пор заинтригованы некоторыми из гениальных догадок индийского математика Сриниваза Рамануджана. Его понимание сущности математического доказательства было более чем туманным, так как он пришел ко всем своим результатам, как ранним, так и более поздним при помощи странной смеси интуитивных догадок, индуктивных соображений и логических рассуждений. Для интуиции и дедукции, а значит и для создания правильной теории, иногда достаточно обычного человеческого ума и никаких выдающихся способностей не требуется. Почему же тогда далеко не все, даже очень талантливые, люди способны научно мыслить, а стройные и убедительные теории встречаются пока еще редко? Ответ Декарта состоит в том, что, обладая умом, далеко не все умеют им правильно пользоваться. Даже о евклидовых “Началах” Лейбниц говорил, что “многие из наших эрудитов, никогда их внимательно не рассматривавших, имеют о них не большее представление, чем слепые о цветах” [99, с.200]. В деле познания нужен метод. Методологическая концепция Декарта, которая опиралась на идею создания универсального метода открытия и обоснования новых истин, включала также и элементы внерационалистического характера с акцентом на интуицию разума.

Главное положение декартовского метода как регулируемого правилами движения мысли состоит в том, что познание простирается лишь настолько, насколько простирается ясное и отчетливое мышление. Современный стандарт требований к логической строгости, остающийся и до настоящего времени основным критерием в практической работе математиков, сложился к концу XIX века. В основе концепции строения современной математической теории лежит фундаментальная дихотомия внешнего и внутреннего ограничения. С одной стороны, в ее основе лежит теоретико-множественная концепция формализованной математической теории, ограничивающая извне область применения данной теории. С другой стороны, теоретико-множественный подход не дает никаких указаний относительно логических средств, при помощи которых математическую теорию придется развивать и уточнять, поэтому другую сторону строения любой математической теории освещает математическая логика. Следует отметить, что ни в период своего возникновения, ни даже в плодотворный период своего развития в XX веке учение о множествах не было единой и цельной теорией, даже при толковании слова “теория” в широком смысле. Поэтому сам термин “теория множеств” в применении к циклу работ, составляющих учение о множествах, не всегда оправдан. Правильнее было бы говорить о теориях множеств, хотя мы будем пользоваться общепринятым термином. Даже Иммануил Кант обращал внимание на антиномичность мышления, говоря о правомерности взаимоисключающих взглядов на один и тот же предмет, что вполне созвучно с современной методологической концепцией дополнительности в квантовой механике.

Наиболее важным и значительным является то, что современная теория множеств выросла из насущных потребностей развития математики в целом и развивалась в связи с ее приложениями в различных математических дисциплинах. Формальные свойства математических объектов и отношений, необходимые для развития теории, фиксируются в виде аксиом. Такая теория применима только к множеству объектов с определенными отношениями, удовлетворяющими, положенной в ее основу системе аксиом. С точки зрения внутренних факторов развития математической теории, она может считаться логически строго выверенной и построенной, если при ее развитии не используются не упомянутые в аксиомах свойства изучаемых объектов и отношений между ними. “Теоретико-множественная концепция не только доставила основной в настоящее время стандарт математической “строгости”, – отмечает академик А.Н. Колмогоров, – но и позволила в значительной мере разобраться в разнообразии возможных математических теорий и их систематизировать” [86, с.67]. Всеобщему употреблению аксиоматического изложения математических теорий способствовало также то, что при их изложении пользуются понятиями ранее построенных теорий. Кроме того, сами аксиомы предлагаются, исходя из некоторого интуитивного понимания или реального знания. При изучении довольно сложных общих образований, например, различных видов алгебр, групп, пространств, такой способ изложения иногда просто необходим для достижения определенной ясности и

избежания возможных ошибок, поскольку наслаждение от изысканно элегантных абстракций, для понимающих ее логику, всегда было заражающее соблазнительным и чарующе привлекательным.

2.2. Платонизм и антиплатонизм в формировании математического знания

Развитие математики Древнего Востока остановилось на идеализации математических понятий о числах, точках, прямых и так далее. Эти понятия определились и надолго стали общепринятыми. Греческой философии мы обязаны появлением математического метода, когда стали исследовать не непосредственные природные объекты, а некоторое представление о них, как о субъективно воспринимаемой реальности. Феномен рождения математического метода по-разному оценивался разными философами. Изучая математику, Платон пришел к выводу, что существует два мира: мир идей (строгий, упорядоченный и гармоничный) и мир вещей (несовершенный, неточный и хаотичный). В соответствии с его учением каждая реальная вещь – это лишь приближенная реализация своей “идеи”. Идеи реальнее действительности – вот что было основой его учения и, в соответствии с этим, математика становится реальнее действительности. У Платона было совершенно фантастическое представление о природе математического исследования, до сих пор будоражащее воображение современных математиков и философов. Согласно Платону, душа человека, занимающегося математикой, обитавшая до его рождения в мире идей, в своей земной жизни постепенно вспоминает тот опыт, который она уже ранее обрела в другой жизни. Из-за недостаточности математических оснований, доступных философии его времени, Платон изменил представление о природе математического метода, предпочел конечный результат развития математических теорий принять за исходную позицию.

Сегодня принято называть платонизмом любую философскую позицию, которая систему идеальных объектов человеческой мысли трактует как особый, независимо существующий мир. Платонистское отношение к математическим объектам своего исследования неизбежно для работающего математика. Он оперирует с абстрактными объектами, как с некой реальностью, составляющей некоторое подобие мира, за которым нет “более подлинной” реальности. Когда математик, не имеющий достаточной философской подготовки, берется за решение методологических вопросов, за объяснение природы своих результатов, он невольно привносит в рассуждения элементы платонизма. Даже тайны творческой силы работающих математиков искали в платонизме. Специфичность математического творчества касается, прежде всего, математической убедительности, которую традиционно было принято отождествлять с потенциальной убедительностью, понимаемой как истинность. Многие математики не могут отделаться от некоторых суеверий, берущих начало от Пифагора и своеобразно воспринятых текстов Платона, и поэтому получивших в современной философии “негативное” название платонизма.

Математические понятия существуют, как им казалось, если не в нашем мире, то в мире “более высокого порядка”, более реальном, чем наш мир. В духе концепции “математического платонизма” истинной считалась теория, которая соответствовала чему-то определенному, существующему вне нас. Однако со временем акценты определения истинности изменились, поскольку сам собой возник довольно коварный вопрос: а что значит “соответствует”? Есть и другой взгляд на эту проблему, согласно которому, платонизмом индуцируется взгляд на математику, как на естественную науку, поэтому и математическое творчество, с этой точки зрения – это поиск объективно предзаданного результата.

Теоретизирование не всегда касалось вопросов мировоззренческого уровня, который достигается общественным сознанием на определенных стадиях его развития. Мировоззренческие искания – характерная особенность духовной жизни всех форм общественного сознания. К ним обращались даже в то время, когда о математической науке или ее отдаленных предпосылках речь еще не шла. Именно первые философские учения создали прецедент построения теории. С первыми математическими учениями ситуация несколько иная. Основоположник греческой философии и математики Фалес создал первое философское учение, обладающее признаками теории, но он не стал автором какой-либо целостной математической теории, хотя и дал первые теоретические доказательства отдельных положений геометрии. Математика эллинской эпохи сформировала представление о ценности математической теории, и это представление осталось в веках. Союз философии и математики определил не только методологический характер древнегреческой математики, но и самой философии, особенно такого ее направления, как платонизм. Заметим, что под платонизмом понимается особый тип реализма, соотносящего математические понятия с идеями из определенного рода “внечувственной реальности”. Согласно учению Платона, наблюдаемый нами мир, как мир чувственно воспринимаемых вещей, является лишь отражением объективного “мира идей”, которые вечны и неизменны, в отличие от непостоянных и изменчивых чувственных вещей. Идеи постигаются умом, поэтому они, по Платону, являются предметом истинного знания. С точки зрения платонизма, математические объекты реально существуют, а человеческий ум имеет уникальную способность их познавать.

Один из аргументов Аристотеля против концепции Платона состоит в том, что “идеальный мир Платона” предназначен для того, чтобы с его помощью объяснить мир чувственно наблюдаемого, но как реализуется это объяснение – это тот мировоззренческий вопрос, на который Платон не дает убедительного ответа. Поэтому платонизм правдоподобен, когда мы мыслим о математической истине, но он, вообще говоря, бесполезен, когда мы говорим о математическом познании. Несмотря на теологические претензии, платонизм выжил благодаря мировоззренческим взглядам самих математиков, которые предпочитают сейчас называть его “умеренным скептическим платонизмом”. Не случайно работающих математиков иногда называют стихийными платонистами, поскольку они уверены в истинности математического знания.

Согласно Платону, именно с математики начинался путь бесконечного постижения истины. В попытках выяснить возможные пути познания истины, благодаря напряженным усилиям человеческого разума, были рождены философия и математика. Многие авторы обосновывали тезис о взаимном влиянии математики и философии, а также о необходимости их совместного существования. Вспомним также о взаимном влиянии математики и философии Древней Греции в процессе их формирования, поэтому неудивительно, что они были взаимосвязаны и в своем дальнейшем развитии. Основы взаимодействия философии и математики составляет потребность использования методологического аппарата друг друга для собственных исследований. Математика, в силу своей абстрактности, хорошо поддается философскому анализу, который, в свою очередь, оказывает влияние на философское мышление.

Фактически абстрактная математика – это отчасти эмпирическое исследование некоторых аспектов природного мира, точнее той его части, которая отражается в определенной коммуникативной деятельности сообщества математиков по созданию новых форм, позволяющей оперировать ими же созданными формальными объектами. Однако, каким бы ни было научное знание, если оно принадлежит миру идей и имеет онтологический статус, то ему должно найтись место в понимании устройства Вселенной. Принято считать, что платонизм – это тот взгляд, которого подсознательно придерживается большинство математиков, не занимающихся профессионально вопросами обоснования. Анализ платонизма важен для понимания формирования математического знания, а также исторических тенденций и закономерностей развития современной математики. Об этом писал знаменитый математик и логик Курт Гёдель: “Несмотря на отличие от чувственного опыта, мы имеем нечто сходное с ощущением при восприятии теоретико-множественных объектов, как видно из того факта, что аксиомы воздействуют на нас как существующая истина. Я не вижу никакой причины доверять этому роду ощущений, то есть математической интуиции, менее чем чувственным ощущениям... Они также могут представлять некоторый аспект объективной реальности” [50, с.145]. Математика XVII–XVIII веков развивалась людьми разного социального положения, например, французским юристом Пьером Ферма, английским университетским профессором Исааком Ньютоном, немецким придворным и дипломатом Готфридом Лейбницем. Только в XIX веке произошла трансформация интеллектуальных дисциплин в профессию, что, по мнению крупнейшего специалиста в области функционального анализа Феликса Браудера, явилось следствием двух важнейших социально-исторических процессов – промышленно-технологической революции и изменения положения университетов в Западной Европе.

Расширение математических исследований и выделение математики как профессии способствовало также организации математических сообществ. Кроме того, следует отметить, что социальные и психологические факторы стали существенно влиять и на оценку новых математических теорий. В разное

время на протяжении всей истории науки превалировало со стороны общества либо утилитарное отношение к математике, либо восприятие ее как разновидности магии. Математики, по-видимому, все же воспринимают свой предмет в дополнительном смысле к указанным точкам зрения. Например, историю математики можно рассматривать и как историю преодоления различных психологических трудностей. Антифундаменталистская трактовка математики была дана австрийским философом Людвигом Витгенштейном. Он воспринимает математические символы и их комбинации как объекты реального мира, а правила игры с символами – как правила действия с предметами физического пространства. Именно такой подход лежит в основе того способа, посредством которого была установлена знаменитая теорема Гёделя о неполноте. Интерес Гёделя к этой тематике следует иметь в виду при оценке того, что называют его “платонизмом”. Двойственность его подхода состоит в том, что, с одной стороны, он не сомневался, что возможна часть математики, изучающая ее собственные конструкции, а с другой стороны, он не считал эту часть наиболее полезной для самой математики и уж тем более не отождествлял ее с математикой в целом. Парадоксальность теоремы Гёделя состоит в том, что, несмотря на ее отрицательное значение для специалистов по основаниям математики, она дала новый импульс творческой мысли математиков. Курта Гёделя называют иногда “крайним платонистом” в связи с его высказыванием о том, что “математические сущности” доступны интуиции математика точно так же, как физические объекты доступны чувственному восприятию. Определенная жесткость и консерватизм математических объектов традиционно рассматривается как их исключительная привилегия по сравнению, например, даже с физическими объектами.

В XIX веке господствовало убеждение, высказанное Иммануилом Кантом, что логика есть полностью завершенная наука. Согласно распространенным тогда представлениям логика фактически включала три раздела: формальную логику, рассматривающую основные законы и формы мышления; прикладную логику, занимающуюся методами научного исследования; теорию познания, исследующую связь между мышлением и действительностью. Примечательно то, что последовавшая затем эпоха бурного развития классической логики вплоть до ограничительных теорем Гёделя начала 30-х годов XX века совпала с появлением и развитием различных неклассических направлений в логике. Однако применимость классической логики в компьютерных науках оказалась настолько плодотворной и впечатляющей, что ряд новых феноменов логического универсума остались без должного внимания. После работ Гёделя стало ясно, что не существует общего метода для определения истинно или ложно произвольно взятое математическое утверждение. Если предположить, что такой метод существует, то тогда можно было бы доказать все истинные утверждения, а Курт Гёдель показал, что в рамках непротиворечивой системы аксиом, охватывающей аксиомы арифметики, такое доказательство провести невозможно. Поэтому, с точки зрения математической логики, целесообразнее говорить не об истинности, а о доказуемости. В таком контексте можно говорить о некоторой аналогии с проблемой разрешимости Гильберта:

существует ли такой метод, при помощи которого, исходя из множества логических аксиом, можно было бы доказать все доказуемые логические утверждения? Кроме Курта Гёделя наиболее весомый вклад в исследование вопроса логической доказуемости внес американский логик Алонзо Черч. Он нашел логическое выражение, которое, в разработанном им непротиворечивом формальном языке, было недоказуемо. Философия математики пытается также разрешить фундаментальные проблемы, связанные с эпистемологическим статусом математических утверждений и онтологическим статусом, соответствующих им, математических объектов. При решении эпистемологических вопросов приходится рассматривать главный онтологический вопрос о существовании математических объектов и природе математических сущностей.

Этот вопрос кажется сложным из-за существовавшего в западной философии на протяжении многих столетий предположения, что в мире существует только два типа вещей: “если не физическое, то тогда умственное”, и “если не умственное, то тогда физическое”. Немецкий логик Готлоб Фреге показал, что математика не является ни физической, ни умственной. Он объяснил это с помощью существования третьего типа вещей – “абстрактных объектов”, про которые, он ничего существенного не мог сказать за исключением того, что они ни физические и ни умственные. Справедливости ради, следует отметить, что система формальных правил Фреге порождает логические истины в строгом математическом смысле, соответствующему лейбницевскому понятию “истинности во всех возможных мирах”. Даже сегодня система Фреге, все еще остается первым убедительным примером обработки нечисловых данных механическими средствами, в том смысле, в каком “теории формальных правил” называют теперь “программами для компьютеров”. Умственными являются индивидуальное сознание, желания, восприятия, страхи, личные мысли, и так далее, а физическое, например то, что заполняет пространство и может быть изучено научными методами. Можно привести и примеры того, что является ни умственным и ни физическим, а именно, музыкальные и литературные произведения, религии, академии наук, университеты. Для университета физическое и мысленное воплощение необходимо, но он не исчерпывается ими. Это также и социальный институт, поэтому умственного и физического представления недостаточно для его описания. Значит можно предположить, что в мире существует не два, а три основных типа вещей: мысленные, физические и социальные. Иногда целесообразно рассматривать математику и как социальную сущность, поскольку сами математики никогда не были “изолированными отшельниками”, несмотря на их стремление к автономии. По мнению американского философа науки Рэндалла Коллинза, это можно выразить с помощью “квазиматематического cogito”: “если я отрицаю, что математическое утверждение должно существовать в форме какого-то конкретного типа дискурса, то в самом этом высказывании я представляю утверждение о некотором дискурсе” [84, с.7]. Поэтому математика имеет социальную

реальность в том смысле, что она является дискурсом в некотором социальном обществе.

Социальный характер математики, на первый взгляд, является тривиальным фактором, свойственным всему человеческому знанию. Тем не менее, философы и историки науки различают “внутреннюю историю науки” и “внешнюю историю науки”. Внутренняя история включает те события, которые можно реконструировать с помощью критерия научной рациональности. В отличие от внутренней эпизоды внешней истории науки не подвергаются “рациональной реконструкции”. Поэтому при исследовании внешней истории математического знания на помощь могут быть призваны социальные и культурные аргументы. Историками и философами науки признается тот факт, что в последней четверти XIX столетия в математике появилась новая тенденция к осмыслению и систематизации накопленного материала. В указанный период произошло “расщепление” в математическом бытии и в математическом сознании, что способствовало возникновению подлинной философии математики. Специалист по квантовым компьютерам и квантовым вычислениям Дэвид Дойч считает фундаментальной ошибкой относительно природы математики, допускаемой с античных времен, то, что “математическое знание более определено, чем какая-либо другая форма знания” [55, с.252]. Такая ошибка, настаивает он, не оставляет другого выбора в теории доказательств, кроме как считать ее частью математики. Доказательства не абстрактны, поэтому их нельзя считать только областью математики. В отношении явлений, связанных с математическими доказательствами, возникает много философских вопросов в контексте акта “принятия доказательства”, тесно связанного с представлениями о стандартах строгости математических рассуждений. Доказательство становится таковым только в результате некоего социального акта принятия доказательства математическим сообществом. Математик доказывает утверждение, даже построение контрпримера рассматривается им как частный случай доказательства.

Хотя встречающиеся в математическом доказательстве конструкции типа: “аналогично предыдущему...” и “очевидно, что...” чаще всего являются указаниями на дыру в доказательстве или источниками ошибок, неточностей или заблуждений. Наиболее показательным примером творческого развития в математике является создание математического анализа. В современных вузовских учебниках он излагается совсем не так, как излагали его создатели вплоть до конца XVIII века. Напомним, что основными его понятиями являются множество, функция, определяемая через множество, последовательность, определяемая через функцию, и предел. Роль понятия “множество” в математике была осознана лишь во второй половине XIX века. В процессе размышления над логическими основами математики и ее структурой осознавалась важность понятия множества, особенностью которого, в частности, является то, что оно не требует вычислений. Кроме того, считая эквивалентными любые два множества, для которых существует взаимно однозначное соответствие, теория множеств не принимает во внимание природу элементов этих множеств. С одной стороны, это позволило применить

фундаментальные результаты математики к разнообразным объектам, равнозначным с точки зрения теории множеств, а с другой стороны, приходилось постоянно преодолевать шлейф сомнения насчет того, насколько содержательны полученные утверждения и теоремы. Долгое время не было сомнений и насчет функций, считалось, что это – либо аналитическое выражение, либо непрерывная кривая. Практически никто не замечал аналогий между функцией и последовательностью, основанной на идее бесконечного продолжения элементов.

Больше всего расхождений в математике конца XVII–XVIII веков было по поводу определений предела и понятий актуально бесконечно малых величин. Так что в начале XIX века критически мыслящие математики стали изгонять бесконечно малые, заменяя их “ ε - δ формулировками”, не желая “приносить строгость в жертву успеху”. Вообще говоря, ε - δ анализ не отражает полностью исходные идеи исчисления бесконечно малых, так как некоторые понятия, в которых бесконечно малые количества качественно различаются, непередаваемы в ε - δ анализ, поэтому они не отражены в более современных разделах математики, например, в функциональном анализе. С методической стороны, например, определение непрерывности функции на языке ε - δ , несмотря на его эффективность при доказательстве непрерывности отображений, весьма далеко от интуитивного представления о непрерывной кривой как “состоящей из одного куска”. Эти издержки абсолютизации появились благодаря включению дотеоретико-множественной математики в теорию множеств. К сожалению, более простые подходы могут привести к логическим ошибкам. Однако отсюда не следует, что используемая в университетском математическом образовании теория непрерывности – это последнее слово в современной математике. Уже в XX веке, благодаря новой технике в канторовской теории множеств, нестандартный анализ Робинсона возродил понятие бесконечно малых по Лейбницу. Хотя математики XVIII века, с точки зрения современной математики, дали много ошибочных доказательств, тем не менее ни одно из них не получило общего признания современников, то есть математическое сообщество, как показывает история математики, всегда действует безошибочно.

Фактически математика всегда была строгой наукой вне зависимости от исторических идеалов строгости и изменений ее критериев. Социальное одобрение играло в математике определенную роль “гносеологической санкции”. К середине XIX века стало неприличным пользоваться актуально бесконечно большими и бесконечно малыми величинами, а уровень строгости математических доказательств поднялся настолько, что даже превзошел лучшие образцы древнегреческой математики и спровоцировал появление математической логики. Вскоре, благодаря результатам, полученным в математической логике, выяснилось, что многие понятия строгих математических рассуждений не имеют прямых интерпретаций. Поэтому они скорее относятся к идеальным понятиям, как, например, понятие действительного числа, предполагающего бесконечную последовательность уточняющих приближений рациональными числами. После их осознания,

идеальные понятия стали предметом изучения не только в философии, но и в процессах творческого мышления. Следует ли поэтому удивляться, что среди математиков популярна точка зрения Платона о первичности идеальных понятий. Некоторые математики стремятся найти собственное решение указанной проблемы, строя доказательства в согласии со своими философскими и методологическими принципами, сознательно преодолевая в себе стихийные остатки математического платонизма.

Платонистский взгляд на математические истины, согласно которому они не зависят не только от индивидуального сознания, но и от социального, отвергал и Людвиг Витгенштейн. Возникающие в математике противоречия, по Витгенштейну, не есть онтологические противоречия бытия, а являются результатом человеческой деятельности, создавшей эти противоречия. Поэтому проблемы оснований математики суть не онтологические проблемы, а проблемы деятельности, поскольку логические и математические системы, по существу, наши конструкции. Это последнее слово является ключевым в понимании витгенштейновской психотерапии страха математиков перед скрытыми противоречиями. Отвечая на вопрос: “Зачем математике нужно обоснование?”, Людвиг Витгенштейн говорил: “Я полагаю, оно нужно ей не более, чем предложениям, повествующим о физических предметах или же о чувственных впечатлениях, – нужен их анализ... . Математические проблемы так называемых оснований в столь же малой степени лежат для нас в основе математики, в какой нарисованная скала несет на себе нарисованную крепость” [36, с.180]. Математика не только учит нас по-новому оперировать понятиями, считал он, но и изменяет нашу понятийную деятельность, когда математическое предложение принято за постулат, либо когда оно доказано.

Мысль о прямой связи между формами языка, культуры и мышления стала толчком для разработки американскими лингвистами Эдуардом Сепиром и Бенджаменом Уорфом гипотезы лингвистической относительности, в соответствии с которой не реальность определяет язык, на котором о ней говорят, а наоборот, реальность опосредована языком. Согласно их теории люди в значительной мере находятся под влиянием того языка, который является средством общения, поэтому нельзя полностью осознать действительность, не прибегая к помощи языка как средства разрешения частных проблем общения и мышления. По мнению Сепира и Уорфа не только “мыслительный”, но и “реальный” мир в определенной степени бессознательно строится на основе языковых форм выражения. С точки зрения “концептуальной относительности” даже наличие несовместимых описаний не ведет к упразднению реальности. Например, в квантовой механике имеется два дополнительных описания: через состояние поля и через состояние частицы с помощью диаграмм Фейнмана. Тем не менее, нельзя утверждать, что это различные миры, поскольку описываемая реальность зависит от способа ее описания. Предположение о математическом происхождении некоторого утверждения делается не только потому, что оно является истинным, а также и потому, что оно воспринимается нами как таковое. Именно так строит свои отношения с математической истиной Людвиг Витгенштейн, поскольку

соответствие между фактом или событием и языковым выражением, описывающим их, невозможно полностью объяснить в логически безупречных терминах.

Не вдаваясь в философское обсуждение того, что есть истина, заметим, что в математике достаточно принять, что есть такие исходные и неопределяемые понятия как “истина” и “ложь”, которые могут быть значениями высказываний. Как только математики пытаются предложить другие значения, дополнительные к этим, например, “неизвестность” или “неопределенность”, так они сразу вынуждены преодолевать трудности, возникающие в связи с тем, что степеней неизвестности много, и поэтому сама по себе она не является логическим значением. Философия математики, считает американский философ математики Ройбен Херш, “запоздала для анализа того, чем занимаются в действительности математики, и для философских выводов в этом отношении” [186, с.590]. Хотя и Витгенштейн, и Лакатос стремились в меру своих возможностей ликвидировать это пробел. Одну из трактовок математики, отрицающих фундаменталистскую обоснованность с помощью очевидных аксиом, дал философ математики Имре Лакатос. Согласно евклидовскому идеалу математической теории, она начинается с проверки истинности некоторой системы исходных положений или аксиом, из которой вытекает истинность остальных, дедуктивно выводимых новых утверждений. Но затем у математиков возникла совсем неевклидианская потребность такого доказательства внутренней непротиворечивости, чтобы можно было удостовериться в том, что “тривиально истинные аксиомы” не противоречат друг другу. С другой стороны, указанная потребность способствовала постановке в философии математики следующей фундаментальной проблемы: действительно ли формальные аксиоматические системы теории множеств являются достаточно общими конструкциями, чтобы охватить всю математическую интуицию, которая в определенном смысле не совпадает с любым множеством формализованных выражений, выдаваемых за ее отражение?

Например, никакая из рассматривавшихся до сих пор формальных систем не адекватна тому представлению о бесконечном, которого бессознательно придерживаются математики. Хотя это важные проблемы философии математики, они потенциально представляют и значительный математический интерес. Современные математики не связывают понятие истины только с аксиомами, хотя убедительность теорем все же связана с приемлемостью абстрактных систем изначальных утверждений, поэтому такой идеал теории иногда называют квазиевклидовским. С точки зрения Лакатоса, живая наука начинается не с оснований или принципов, а с непосредственно проверяемых утверждений. В философии математики Лакатоса преобладает тенденция развеять миф об исключительности и непогрешимости математического знания и сблизить его с содержательным знанием: “Мы никогда не знаем, мы только догадываемся. Мы можем, однако, обращать наши догадки в объекты критики, критиковать и совершенствовать их” [98, с.115]. В связи с этим, американский философ Ларри Лаудан говорил, что если рациональность состоит в том, чтобы

верить только в то, про что мы можем разумно предполагать, что оно является истинным, то тогда наука была и всегда будет иррациональной. Математики XX века активно и плодотворно используют в своих выводах теорию множеств, опираясь на нее как наиболее фундаментальную структуру при обосновании математики, несмотря на различного рода парадоксы. Этот иррациональный факт философии математики имеет вполне рациональное объяснение в поведении математиков, поскольку внутренние проблемы теории не являются причиной отказа от нее, если она не исчерпала свои эвристические возможности.

В связи с бурным развитием экспериментальных исследований в западноевропейской философии Нового времени происходило формирование нового физического идеала научности. Так Френсис Бэкон считал, что самое лучшее из всех доказательств есть опыт, если только он коренится в эксперименте, и поэтому рассматривал математику как вспомогательное средство, как приложение к естественной философии. Переход от математического к физическому идеалу научности можно считать одним из крупнейших изменений в рамках фундаменталистской парадигмы, поскольку в первом случае в качестве обосновывающих принципов выступали аксиомы и постулаты разума, а во втором – познавательные эмпирические элементы. Однако, наряду с этим, и в рамках математического стандарта научности, происходили собственные изменения, как, например, отказ от требований самоочевидности и наглядности аксиом, с заменой их на условия независимости, непротиворечивости и полноты. Несмотря на поразительную плодотворность математических методов, математики, с присущим им критицизмом, выявляли шаткости нового фундамента математики, что является “свидетельством исключительной интеллектуальной смелости, принципиальности, самокритичности математиков” [34, с.105]. При этом следует иметь в виду, что, с точки зрения математической практики, математики поступают вполне рационально, заботясь больше о корректности отдельных доказательств, чем о непротиворечивости в целом, поскольку непротиворечивость теории – это необходимое следствие достоверности отдельных доказательств. Хотя математические науки в абстрактных построениях далеко ушли от классического понимания математической строгости, ориентация на математический идеал научности как на всеобщий научный идеал просматривается и в современности.

В XX веке эта тенденция ярко выражена в творчестве выдающегося немецкого математика Давида Гильберта. Один из последних периодов деятельности Гильберта был посвящен обоснованию математики путем ее полной формализации с последующим математическим доказательством непротиворечивости формализованной математики. Знаменитая программа Гильберта, посвященная понятию математического доказательства, включала следующие три этапа: формализацию доказательства, полноту теории и критерий разрешимости. Строгое математическое определение доказуемости необходимо для того, чтобы можно было задавать вопросы о том, в каком

смысле для того или иного утверждения существует доказательство. Полнота построенной формальной теории означает, что любое истинное утверждение должно быть доказуемо в смысле указанной формализации понятия доказательства. Первый пункт этой программы был успешно выполнен. В настоящее время для большинства математиков “теорема” – это то, что может быть доказано в системе аксиом теории множеств Цермело-Френкеля. Если бы удалось в полном объеме реализовать второй пункт программы, то тогда разрешимость была бы эквивалентна в некотором формальном языке понятию “истинности”. Однако в 30-е годы XX столетия Куртом Гёделем по существу было показано, что никакая достаточно “сильная” теория с явно заданным списком аксиом не может быть полной. Поэтому в полной общности ответить на вопрос о доказуемости произвольного математического утверждения невозможно. Но это обстоятельство не является преградой для развития математики. Всякая научная область, по Гильберту, жизнеспособна, пока в ней избыток новых проблем. Недостаток новых проблем означает отмирание или прекращение самостоятельного развития. Методологическое единство математики было для Давида Гильберта результатом не только глубокого убеждения, но и его богатого научного опыта.

Развитие математики связано с двумя важнейшими факторами: ее приложениями и решением научных проблем. На первом и втором Международных конгрессах математиков, которые регулярно проводятся уже более 100 лет, состоялись доклады крупнейших математиков того времени – Анри Пуанкаре и Давида Гильберта, посвященные указанным тенденциям развития математики, а именно, вопросам, связанным с физикой, и проблемам, возникающим в самой математике. На совместном заседании секции истории и библиографии и секции преподавания и методологии проходившего в Париже 2-го Международного конгресса математиков 8 августа 1900 года Давид Гильберт выступил со своим докладом “Математические проблемы”. Из предложенных Гильбертом 23 проблем первые 6 из них относятся к обоснованию и аксиоматизации различных математических дисциплин, а в остальных рассматриваются более специальные вопросы. На последнем пленарном заседании президент конгресса Анри Пуанкаре выступил с докладом “О роли интуиции и логики в математике”. Важным фактором развития теоретической математики является систематическая разработка новых фундаментальных теорий. Содержательных докладов об этой составляющей развития современной математики не было ни на первых математических конгрессах, ни на последующих. “Быть может, потому, – замечает академик Д.В. Аносов, – что не нашлось третьего математика такого ранга, как Пуанкаре и Гильберт, или потому, что наличие этой третьей компоненты очевидно?” [5, с.29]. Доклад Гильберта был, как бы спровоцирован докладом Пуанкаре. Не касаясь проблем, сформулированных Пуанкаре и разбросанных по его работам, Гильберт, по его словам “как бы на пробу”, решил показать, что важнейшие стимулы для развития математики содержатся внутри ее самой. Благодаря свойственной Давиду Гильберту широте научных

интересов его проблемы содержали круг вопросов, затрагивающих значительную часть математики.

Историкам математики до сих пор не всегда понятны причины, которыми руководствовался Давид Гильберт при постановке той или иной задачи, поскольку только часть его работ предшествует докладу “Математические проблемы”, например, исследования по алгебраической теории чисел и теории инвариантов, тогда как остальные, например, исследования по основаниям и логике, появляются намного позже. Как отмечают математики С.С. Демидов и А.Н. Паршин, анализирувавшие современное состояние математических проблем Гильберта, их решение составляет одну из наиболее увлекательных страниц истории математики XX века. “Сегодня, когда нам известна история решения проблем на протяжении целого столетия, мы видим, – пишут они, – что проблемы эти оказались не равнозначными по сложности и иногда сформулированы так, что понимание сути зависит от того, какой смысл вкладывается в ту или иную гильбертовскую формулировку” [51, с.582]. Давид Гильберт удачно выбирал “образцы” нерешенных задач, не ошибаясь в оценке их важности, но даже такому математическому гению не всегда удавалось правильно оценить их сравнительную сложность. Например, он считал, что гипотеза Римана, то есть основная часть 8-й проблемы, будет доказана еще при его жизни. Он надеялся, что самые молодые из математиков доживут до решения проблемы Ферма, хотя ее нет в списке проблем, ее и так все помнили, но был уверен, что даже им не суждено узнать об иррациональности $2^{\sqrt{2}}$ и вообще о 7-й проблеме. Мы можем сейчас с уверенностью утверждать, что все вышло наоборот. Гипотеза Римана до сих пор не доказана, доказательство теоремы Ферма, благодаря усилиям многих математиков, было найдено в конце XX века, а иррациональность $2^{\sqrt{2}}$ была доказана за 14 лет до смерти Гильберта. Тем не менее, эта ошибка гения указывает на то, что он действительно умел выбирать труднейшие задачи.

Напомним, что именно пифагорейцы сделали открытие, связанное с $\sqrt{2}$, которое перевернуло их взгляды. Они доказали, что отношение диагонали к стороне квадрата нельзя выразить отношением целых чисел, то есть оно иррационально. Поскольку эмпирически проверить несоизмеримость диагонали со стороной невозможно, то многие считают, что математика как наука началась с этой теоремы Теэтета, который дал ясное и законченное доказательство, хотя практически невозможно установить, кому же принадлежит данный результат. Со временем было осознано, что добиться общепризнанных и неопровержимых результатов в математике можно, лишь применяя строго логические рассуждения. Заметим, что если вместо формальных систем и элементарных теорем о них рассмотреть для сравнения использование целых чисел, то при таком сопоставлении можно было бы развить аналогию между теоремой Гёделя о неполноте и иррациональностью числа $\sqrt{2}$. Греческая геометрия стараниями Евклида и его последователей сделалась значительно более строгой благодаря тому, что стала полагаться только на логический вывод из явно сформулированных предложений. Хотя

классические аксиомы Евклида и служили продолжительное время образцом точных наук, они все же являлись трудно уловимым смешением кажущихся определений и точных постулатов, и, вообще говоря, не независимы друг от друга. Аналогичный процесс в теории множеств выдающихся немецких математиков занял уже не 300, а всего лишь 35 лет. Если Георг Кантор сыграл роль Фалеса – роль основателя и первооткрывателя теории множеств, исходя из интуитивных представлений, то его ученик Эрнест Цермело сыграл роль Евклида, создав в 1908 году аксиоматическую теорию множеств. На самом деле, как Евклид являлся одним из многих в длинном ряду греческих геометров – творцов “евклидовой” геометрии, так и Цермело был лишь первым из полдюжины математических авторитетов – создателей аксиоматической теории множеств.

Одной из причин кризиса, разразившегося в конце XIX века, стал тот факт, что понятие множества в математике было априорным. Георг Кантор пытался дать ему определение, например, в его примечаниях к “учению о многообразиях” он поясняет, что под множеством понимают всякую совокупность определенных элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона. С современной точки зрения это “определение” довольно расплывчато. С некоторой долей иронии его называют “наивным”, сравнивая его с определением Евклида для точки как “места без длины и ширины”. Теория множеств, в которой понятие множества считается априорным, называется в современной математической литературе “наивной”, в отличие от аксиоматизированной теории множеств, в которой понятие множества задается с помощью систем аксиом. Фундаментальные первичные понятия математики, как правило, вводятся двумя способами: содержательным, или, как было сказано выше, “наивным”, и формальным, или аксиоматическим. Кантор считал, вполне в духе современной математики, что совокупность является множеством, если ее можно мыслить как единое без противоречия. В отличие от современных математиков Кантора не удовлетворяло чисто формальное определение и он искал позитивное содержание нового понятия. В его понимании множества выделяется целостность, образованная в результате действия определенного закона его формирования. “В современном формальном подходе к понятию множества “законообразный” характер образования множества остается незамеченным” [25, с.306]. В абстрактной теории множеств особое положение занимает одна аксиома, которую часть математиков с трудом принимала на веру, как в свое время и известный постулат о параллельных в геометрии. Мы имеем в виду аксиому выбора. Аксиома выбора демонстративно неэффективна и шок, вызванный ею и появившимися практически тогда же парадоксами теории множеств, заставил, наконец, осознать, что слишком многое в математике конца XIX века стало неконструктивным.

Трудности, связанные с этой аксиомой, порождены широтой, которая придается любой совокупности множеств, хотя большинству людей аксиома выбора, впрочем, как и постулат о параллельных, кажется интуитивно

правдоподобной. Речь идет о том, что для бесконечной совокупности множеств по существу нет способа составить новое множество поочередной выборкой элементов из всех членов заданной совокупности. В определенном смысле, признание аксиомы выбора – это тоже акт веры. Неудивительно, что единственным аргументом в пользу принятия аксиомы выбора является убежденность в том, что Бог обладает могуществом для сотворения соответствующей функции выбора. С точки зрения платонистов, вопрос об истинности аксиомы выбора имеет объективный характер. Поэтому одни из них, в соответствии со своей позицией, принимают ее, другие отрицают ее, а есть и такие, кто принимает аксиому выбора с рядом ограничений. Американский математик Поль Коэн и его коллега Ройбен Херш характеризуют полезность этой аксиомы следующим образом: “Оказывается, из невинной с виду аксиомы выбора следуют некоторые неожиданные и чрезвычайно сильные выводы. Например, мы получаем возможность использовать индуктивное построение для доказательства утверждений об элементах в любом множестве...” [89, с.47]. Поначалу казалось, что созданная в конце XIX века Георгом Кантором теория множеств может стать универсальным фундаментом для всех теоретических разделов математики. Однако вскоре выяснилось, что этот теоретико-множественный фундамент выглядит не вполне надежным, в связи с обнаруженными внутренними трудностями новой теории.

До сих пор многих удивляет триумфальное шествие канторовской программы в математике. Для этого есть немалые основания. Возможно поэтому, в учебной, философской и научно-популярной литературе как бы “между прочим” сообщается об изъянах канторовской программы. Наиболее существенной из этих проблем была неполнота теории множеств. Даже проведенная Эрнестом Цермело и усовершенствованная несколько лет спустя Абрагамом Френкелем формальная аксиоматизация “наивных” принципов рассуждений Кантора, избавив ее от известных парадоксов, не позволила дать ответ на многие простые вопросы о множествах, например, выяснить, существуют ли неизмеримые по Лебегу множества действительных чисел. Для этого требовались новые принципы или аксиомы, важнейшей из которых оказалась аксиома выбора, введенная Цермело. В реальном мире таких абстракций нет – они являются лишь идеальными образованиями, но ведь все математические абстракции таковы: ни число, ни точка, ни функция не воспринимаются органами чувств человека, хотя для них не требуют недоступного нам “созерцания”. Бесконечные множества ничуть не хуже в этом отношении. Теория множеств Цермело-Френкеля, несмотря на все критические замечания, самая фундаментальная на сегодня, и на ее основе строятся основные разделы современного математического и функционального анализа. Выяснению роли этой аксиомы в математике посвящено немало работ, основной из которых считают статью польского математика Вацлава Серпинского “Аксиома Zermelo и ее роль в теории множеств и в анализе” (1918). Например, в популярном и знаменитом университетском курсе Г.М. Фихтенгольца “Основы математического анализа” для математиков слова “аксиома выбора” вообще не встречаются, однако большинство содержащихся

в нем утверждений в той или иной степени связано с этой аксиомой, хотя может быть и опосредовано.

Так понятие предела функции одного переменного определяется двумя способами: с помощью последовательностей и неравенств, использующих язык ε - δ . Эквивалентность этих двух определений доказывается только с помощью аксиомы выбора. Отмеченная двойственность остается и при определении пределов интегральных сумм. Та же двойственность сохраняется и при определении дуги плоской кривой. Без аксиомы выбора определения предельной точки и точки сгущения, предела функции через пределы последовательностей и на языке “ ε - δ ” и так далее являются существенно различными. Без этой аксиомы нельзя было бы, в зависимости от удобства рассуждений или вычислений, пользоваться тем или иным определением. В математике появились бы два разных определения, например, предела функции или интеграла Римана, а при доказательстве теорем анализа пришлось бы изобретать более изощренные способы рассуждений. Аксиома выбора имеет внешне простую и весьма привлекательную формулировку, настолько естественную, что ее применение до начала XX века не осознавалось явно. Какая из математических систем, то есть с аксиомой выбора, без нее или допускающая ее с некоторыми ограничениями, самая полезная, зависит от того, какой математической концепции – платонизма или антиплатонизма – мы придерживаемся. Отсутствие аксиомы выбора не обеспечивает само по себе реализации “чистых теорем существования с помощью явно определимых множеств”. С точки зрения двойственности рассмотренных понятий, ограничение “определимыми множествами” обеспечивает реализацию “аксиомы выбора” лишь при условии, что эти определения явно вполне упорядочены и само отношение между определением и определяемым множеством тоже определимо.

Заметим, что в математике существуют многочисленные нетривиальные эквивалентные утверждения или аналоги аксиомы выбора, что впрочем, и не удивительно, если вспомнить о подобном феномене, сопровождавшем аксиому параллельности в геометрии. Это типичная ситуация для каждого фундаментального математического утверждения. В современной математической литературе приведены совершенно различные, хотя внешне эквивалентные, формулировки аксиомы выбора, а также ее следствия и альтернативы. Диапазон мнений об аксиоме Цермело довольно широк. Сомнения и споры вызывали в основном следующие два принципиальных момента. Во-первых, речь идет о реализации выбора бесконечной последовательности элементов, во-вторых, выбор элемента из произвольного неупорядоченного множества – это тоже логическая проблема. Выбираемые с ее помощью множества или функции определяются не единственным образом; их существование принимается, но принципиально не дается средства предпочесть что-либо одно. Говоря о выборах с помощью аксиомы Цермело, создатель Московской математической школы академик Н.Н. Лузин утверждал, что ее сторонник “выбирает и грезит” по-своему, поэтому нет, не только

возможности сообщить своему собеседнику о проделанных в бесконечном количестве выборах, но даже трудно быть согласным с самим собой. За старыми дискуссиями по поводу аксиомы выбора стояли глубокие и интересные проблемы. Специалисты по математической логике и основаниям математики высказывают сомнения в том, что вопрос логической независимости этой аксиомы действительно точно отражает сущность проблемы. Так как, с математической точки зрения, аксиома выбора не противоречит остальным аксиомам теории множеств, то нет причин не применять ее в математических доказательствах. С другой стороны, характер этой аксиомы сильно отличает ее от остальных аксиом, поэтому есть смысл и в том, чтобы исследовать модели теории множеств, которые не удовлетворяют аксиоме выбора.

Как отмечает специалист по математической логике Томас Йех, “ситуация аналогична неевклидовым геометриям: изучая такие модели, мы узнаем, какие теоремы в действительности опираются на аксиому выбора и каковы связи между следствиями и различными ослабленными формами этой аксиомы” [69, с.58]. Убедительность доказательства зависит от багажа математических знаний, поскольку для профессионально подготовленного математика доказательство может быть достаточно коротким, а для новичка такое доказательство может оказаться довольно сложным. Вопреки распространенному мнению формализация не является синонимом надежности математических рассуждений. Когда математик в сложных ситуациях хочет убедиться в том, что математический результат верен, то он не формализует его доказательство, то есть не сравнивает его шаги с формальными правилами, а пытается сделать его доступным для понимания. Веря в практическую надежность обычной математики, он полагается не на логические, а на математические основания. Заметим, что английским математиком Аланом Тьюрингом для решения абстрактных логических проблем была предложена гипотетическая машина, позволяющая определять, какие проблемы разрешимы, а какие нет, приведшая к перевороту в выполнении реальных вычислений на реальных машинах. Тьюринг уловил определенную связь между проблемой разрешимости и идеей вычислимости функции. Нужна была только простая и точная модель процесса вычисления. Машина, построенная Тьюрингом, как раз и отвечала этим требованиям. Кроме того, он удачно увязал идею вычислимой функции с результатами Георга Кантора по теории бесконечных множеств. Используя идею Кантора, можно показать, что множество всех вычислимых функций имеет ту же мощность, что и множество всех натуральных чисел, то есть это счетное множество. Поэтому отсюда следует вывод о том, что не все функции вычислимы. Более того, было доказано, что все понятия алгоритма, используемые в математике, эквивалентны в том смысле, что алгоритмически определимые функции над минимальным базисом понятий совпадают.

Однако совпадение определимости не означает сопоставимости ресурсов, необходимых для вычисления конкретной функции различными понятиями алгоритма. Поэтому утверждение о том, что все можно вычислить на машине Тьюринга, некорректно, когда применимость неявно подменяют

определимостью. Поскольку термины “околокомпьютерной” методологии слишком многозначны, то в поисках практического решения проблемы искусственного интеллекта Алан Тьюринг предложил “игру в имитацию”, известную сегодня под названием “тест Тьюринга”. Он считал, что вопрос “может ли машина мыслить?” должен решаться не на эмоциональном уровне, а при помощи точных критериев того, что такое мышление, предложив в качестве одного из таких критериев тест, суть которого заключена в следующем утверждении. Если машина может длительное время поддерживать виртуальный диалог с человеком, не знаящим, кто его партнер, и если последний уверен, что разговаривал с человеком, то она может считаться разумной. В середине 60-х годов американский ученый Джозеф Вейценбаум создал программу “Элиза”, которую, как и знаменитую героиню пьесы Бернарда Шоу “Пигмалион”, можно было обучать “говорить” все лучше и лучше. Она имитировала диалог между психоаналитиком и пациентом, не пытаясь понять человеческий язык, а просто на основе формальных знаний о правилах синтаксиса “возвращала” человеку его собственные утверждения. Вейценбаум стремился показать, что общее решение задачи понимания вычислительной машиной естественного языка невозможно, так как “понимание языка происходит исключительно в рамках определенного контекста и даже эти рамки бывают общими для различных людей лишь в ограниченной степени” [31, с.33]. Программа “Элиза” экспериментально опровергнула тест Тьюринга в его примитивном понимании, поскольку люди воспринимали эту программу как достаточно разумного и доброжелательного собеседника. Тьюринг переоценил интеллект среднего человека. По существу эти эксперименты выявили внерациональные аспекты того, что даже сложные формальные операции человек понимает иногда как неформальные.

Проблема рождения теоретической математики, обладающей своими специфическими приемами обоснования истинности результатов, традиционно предстает в философии как проблема возникновения рационального мышления. Принципы рационального мышления пронизывают нашу жизнь и даже вплетены в эмоциональные ее проявления. Наиболее распространенной версией является отождествление возникновения теоретической математики с появлением доказательства как фундаментальной характеристики математического знания. Но, например, в античной Греции доказательство проводится как геометрическое построение. Даже при поверхностном взгляде на современную математику бросается в глаза заметно увеличившаяся специализация в теоретической математике, обусловленная сложностью теоретических конструкций, что, вообще говоря, ведет к несбалансированному росту дифференциации теоретического знания. Заметим, что слова “доказательство” и “знание”, если их рассматривать в историческом аспекте, не имеют однозначного смысла, и в разное время в них вкладывалось разное содержание. Например, решение некоторых проблем Гильберта было получено сравнительно быстро, для других долго не находилось корректных доказательств, а некоторые проблемы не решены до конца до сих пор – это прежде всего совокупность задач теории простых чисел, входящих в восьмую

проблему, а именно, гипотеза Римана о нулях дзета-функций, общий случай тернарной проблемы Гольдбаха и проблема близнецов, а также шестнадцатая проблема о числе предельных циклов для дифференциальных уравнений на плоскости. Сравнительно недавно была наконец окончательно решена 21-я проблема Гильберта: “Показать, что всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромии”.

Долгое время считалось, что проблема Гильберта для фуксовых систем линейных уравнений, часто называемая в математической литературе проблемой Римана-Гильберта, была полностью решена в положительном смысле югославским математиком Иосифом Племелем в 1908 году, который свел ее к однородной граничной задаче Гильберта теории сингулярных интегральных уравнений. Однако в начале 1980-х годов в его работе были обнаружены лакуны. Оказалось, что доказательство Племеля проходит лишь в частном случае, когда одна из матриц монодромии, отвечающая обходу какой-либо особой точки, диагонализируема. Следует заметить, что проверка чужого достаточно сложного доказательства не очень увлекательное интеллектуальное занятие, требующее такого же терпения, как и самая элементарная, но довольно трудоемкая вычислительная работа. Только в 1990 году российским математиком академиком А.А. Болибрухом было получено отрицательное решение проблемы Римана-Гильберта [22]. Построенный им контрпример относился к случаю четырех особых точек и монодромии ранга три, кроме того, он расклассифицировал соответствующие группы монодромии, нереализуемые фуксовыми системами. История решения 21-й проблемы Гильберта, как и многих других задач, поучительна для тех, кто считает, что кропотливая проверка и внесение поправок в чужие работы – это никому не нужная крайность. Математическое доказательство может считаться доказательством, когда оно строго оформлено, а его результат можно считать истиной только при самой тщательной проверке. Этот конфликт творчества и логики лишь обостряется по мере повышения строгости доказательств. Все науки по-своему заботятся о доказательствах своих суждений. Общим для них является то, что логика начинает им изменять, когда они без особых на то оснований начинают торопиться с признанием новых методов доказательств. Проблема абстрактного математического объекта, его отличие от объектов, изучаемых другими науками, как и проблема сущности доказательства активно исследуется философами науки.

Сущность доказательства состоит в том, что оно есть реализация предшествующего видения цели доказательства, то есть того, что мы собирались доказать. Это осмысление достигается вне, а точнее до, доказательства, которое в большей части лишь технически оформляет задуманное. Поэтому доказательная математика прогрессирует до тех пор, пока ученый видит больше, чем доказывает. Блез Паскаль, занимаясь проблемой строгого обоснования своих выводов, заявил по поводу преклонения перед авторитетами, что “когда мы цитируем авторов, мы цитируем их

доказательства, а не их имена”. Гильбертовский способ описания абстрактных доказательств как формальных “манипуляций” был принят им, а вскоре и большинством математиков, за определение сущности доказательства. Но при серьезном подходе он тоже нуждается в обосновании, точнее с решением проблемы полноты. Существуют положительные и отрицательные решения этой проблемы. В частности, проблема полноты решена отрицательно Куртом Гёделем для рассуждений о специфически математических понятиях в терминах натуральных чисел. Если вводить иерархию логической строгости доказательств, то на одном полюсе будет прямое доказательство, а на другом – косвенное доказательство, то есть доказательство от противного, в котором используются наиболее сильные логические средства. Иногда строгость доказательства отождествляют со строгостью анализа доказательства. Однако строгость доказательства может возрастать только с углублением строгости анализа доказательства, и основания математики становятся одним из главных источников проблем на пути совершенствования строгости и непротиворечивости теорий. Но это не согласуется с историей развития математики. Фактическая строгость математики всегда была достаточно высокой и в начальные периоды полного отсутствия логических критериев строгости.

После обнаружения парадоксов теории множеств некоторые математики, несмотря на то, что множества являются фундаментальными понятиями для математики и человеческого мышления, просто избегали полагаться на интуицию при рассмотрении множеств. Тогда как другие, напротив считали, что парадоксы не затрагивают теории множеств по той причине, что они возникают из-за определений или рассуждений не только искажающих математическую интуицию, но и существенно отличающихся от методов, допустимых в математике. Для любой из этих точек зрения важной задачей является уточнение и философский анализ представлений, лежащих в основе теории множеств, а также выявление рассуждений, которые приводят к противоречиям. Необходимо признать, что аксиоматический метод оказался наиболее подходящим для этой цели. Современные аксиоматические системы представляют собой исчисления. Понятие исчисления – это, во-первых, формальный язык, во-вторых, система аксиом и, наконец, точная формулировка логических средств доказательства. Использование логических средств в философии пока еще не дошло до того, чтобы математики, исследуя предложенные исчисления, пришли к какому-нибудь нетривиальному философскому выводу. Академик Ю.Л. Ершов считает, что в принципе это возможно, если не ограничивать себя только формулировкой исчисления, а изучать его и выводить следствия. “Для того чтобы это произошло, нужно осознать, – говорит он, – что такая задача существует и не следует ограничивать себя просто формулировкой исчисления, а нужно это исчисление изучать, выводить следствия (быть может, очень далекие)” [63, с.87]. В истории математики это можно проиллюстрировать на эпистемологическом статусе аксиомы выбора.

В начале, при ее формулировании, она никаких сомнений не вызывала и даже неявно присутствовала во многих математических рассуждениях, и только осознанное использование ее при построении различных парадоксальных утверждений привело ряд известных математиков к сомнениям в правомерности ее использования. Характерной чертой современного этапа аксиоматического метода построения математической теории является то, что наряду с формулировкой исходных аксиом в явном виде необходимо дополнительно формулировать и правила вывода, которые допустимы при дальнейшем развитии этой теории. Современное естественнонаучное мышление является полноценным только при наличии дополнительной стратегии познания, которая возникает, например, на основе изучения неклассического естествознания. Поэтому истинно дополнительными понятиями в философии математики являются не рациональное и внерациональное, или образное, мышление, а классическая и неклассическая стратегии познания. Заметим, что “раздвоение” арифметико-алгебраического и геометрического, или понятийного и чувственного, в математическом познании можно проследить, начиная с математики древних греков. Любая серьезная теория требует глубоких возражений, поскольку взаимосвязь научного знания гораздо сильнее, чем можно вообразить, наблюдая, например, современную математическую науку, разделенную, казалось бы, на почти невзаимодействующие области знания.

Минувший XX век в истории человечества, возможно, будет представляться одной из вершин развития теоретических наук, основанных на математике и физике. Академик С.П. Новиков предположил, что подобную вершину теоретического уровня цивилизация уже проходила около двух тысяч лет тому назад в период эллинизма. Именно тогда были собраны, подытожены и существенно развиты математические открытия предыдущих культур “на базе принципиально нового тогда фундамента – открытости информации и свободного обмена идеями” [125, с.97-98]. Философия науки никогда не откажется от различных направлений развития математики, как не отказывается она от господства логического и рационального над миром, поскольку именно с помощью содержательных понятий мы пытаемся познать окружающий нас мир. Если с помощью традиционных аксиом нельзя решить какую-либо проблему, то это скорее говорит о внутреннем несовершенстве данных аксиом, а не об их неадекватности “миру идей”. Поэтому основной вывод состоит в том, что хотя как творческий метод, работающих математиков, платонизм весьма эффективен, при решении методологических вопросов от него следует сознательно отказаться.

2.3. Исследование математических проблем в духе критического рационализма

История науки показывает, что многие существенные фрагменты интуитивных представлений о пространстве могут быть формализованы в виде дедуктивных систем, кроме того, такого рода формализации содержат в себе

“зародыши” новых миров, подобных, например, неевклидовым геометриям русского математика Николая Лобачевского и венгерского математика Яноша Бойаи, которые изначально вроде бы противоречили физической интуиции, но затем слились с ней в рамках теории относительности. Различные современные методологии научного мышления по-своему тяготеют к рационализму. Их объединяет общая цель – строго придерживаться рационалистических принципов науки, хотя то, что например, современная физика называет действительностью – это не всегда действительность, а скорее, тот или иной миф о действительности. В философском осмыслении логических и методологических принципов науки выделяется концепция критического рационализма философа науки Карла Поппера. Математика заинтересовала Карла Поппера как возможное приложение его концепции “трех миров”. Например, Ю.И. Манин говорит о теории множеств как об особом мире, “который обладает некоторой реальностью и внутренней жизнью, мало зависящей от формализмов, призванных его описывать” [107, с.108]. Но такого рода характеристики можно дать и многим другим содержательным математическим теориям.

Используя слова “мир” или “универсум” в нестрогом смысле, Поппер различает следующие три мира: “первый мир” – это мир физических объектов или физических состояний, “второй мир” – это мир состояний сознания, мыслительных состояний, а “третий мир” – это мир объективного содержания мышления, содержания научных идей, поэтических мыслей и произведений искусства, то есть третий мир по существу продукт человеческого духа. Обитателями третьего мира, согласно Попперу, являются, прежде всего, теоретические системы, а другими важными его обитателями являются проблемные ситуации, в частности, природные законы в потенции. Однако наиболее важными его обитателями являются критические рассуждения и то, что может быть названо состоянием дискуссий или состоянием критических споров. Например, к “третьему миру” можно отнести доказываемые методом от противного так называемые “чистые теоремы существования”, в которых существование математических объектов доказывается опровержением предположения об их несуществовании. Это чаще всего происходит без всякого намека на какое-либо указание реального математического существования такого объекта, пытаясь тем самым сделать этот объект хоть сколько-нибудь “математически осязаемым”. Этим объясняется негативное отношение к уравнительному подходу к математическим абстракциям со стороны представителей конструктивных принципов понимания математических суждений.

Почему математические объекты, такие, как числа, множества, отображения, уравнения и другие, а также теории, теоремы и доказательства, все же можно рассматривать как объекты “третьего мира”? Потому, что такая трактовка позволяет учесть две важнейшие черты этих объектов. Во-первых, они не являются объектами реального мира и, вообще говоря, для “продвинутых” математических теорий, не могут рассматриваться как результаты абстракции реальных свойств. Во-вторых, математики не

придумывают свойства изучаемых объектов, а открывают их в результате исследований. В качестве примера, подтверждающего эту мысль, известный физик-теоретик Роджер Пенроуз приводит фрактальное множество Мандельброта. Оно не было изобретено Бенуа Мандельбротом, а было им открыто. Подобно планете Нептун, это множество существовало задолго до того, как его открыли математики и поняли его сущность. В определенном смысле множество Мандельброта и подобные ему фрактальные множества являются представителями объектов третьего мира Поппера. Строго говоря, их нельзя считать созданием компьютера, так как вычислительный процесс должен продолжаться бесконечно долго и поэтому их невозможно вычислить. Математика – это не сочинительство в том смысле, что у профессионалов-математиков нет свободы поэтов или прорицателей, поскольку они должны открывать, считает Поппер, а не изобретать математические законы. В вопросе о том, изобретаются или открываются математические истины, трудно придти к общему решению, хотя большинство математиков склоняются к открытию.

Концепция Поппера в таком контексте оказывается очень удобной. Эта концепция позволяет математикам следовать своей естественной установке. Кроме того, эта концепция избавляет от признания существования идеальных объектов типа “платоновского царства идей”. В множественности миров есть одна гносеологическая трудность: одинакова ли математика во всех возможных мирах? Внутренняя непротиворечивость формальной системы требует существования некоего “возможного мира” с единственным ограничением, чтобы все его интерпретированные теоремы были бы истинны, с точки зрения математики и логики нашего мира. С другой стороны, внешняя непротиворечивость с внешним миром требует того, чтобы теоремы были истинны и в “реальном мире”. Если мы хотим, чтобы “математика во всех воображаемых мирах была такая же, как и в нашем мире”, то тогда разница между двумя типами непротиворечивости формальных систем, теоремы которой интерпретируются как математические суждения, должна исчезнуть. Но если, например, евклидовский постулат параллельности был верен во всех воображаемых мирах, то тогда неевклидовы геометрии были бы в принципе невозможны. Что же тогда является общим для всех воображаемых миров? Могут ли существовать такие миры, в которых противоречия – это вполне нормальное и обыденное явление, то есть миры, где противоречия не являются противоречиями? Если мы можем вообразить подобное, то такие миры действительно возможны, но в традициях рационального познания они мало вероятны. В историко-философском плане третий мир Поппера можно рассматривать как современную интерпретацию расплывчатого понятия “трансцендентального субъекта”. Однако сам Карл Поппер обвинял Нильса Бора в том, что тот с помощью принципа дополнительности ввел в физику субъективность. В своей критике концепции Бора он делает акцент на ее социокультурном смысле.

В контексте общих рассуждений о смысле и назначении науки Поппер пытался показать, что концепция дополнительности Бора порывает с наиболее ценными традициями рационалистического мировоззрения европейской

культуры. В философии математики интуиционистского направления Карл Поппер одним из главных достижений считает понимание того, что математика создана человеком. Это радикально антиплатонистская идея, если под платонизмом понимать учение, согласно которому математические объекты могут существовать, не будучи созданными нами и, следовательно, без доказательства своего существования. Добавим к этому, что именно Платон был первооткрывателем третьего мира и его влияния на нас. Третий мир Платона божественен, он был неизменяемым и истинным. Платон считал, что третий мир форм и идей обеспечит всех окончательными объяснениями. Заметим, что мир идей – мир Платона – в отличие от мира материальных вещей в пространстве и времени, образующих основу физики, вообще говоря, лишь немного может объяснить в математике. Таким образом, существуют принципиальные различия между третьими мирами Поппера и Платона. Как указывает Поппер, его третий мир создан человеком и изменяется. Он содержит не только истинные, но также ошибочные теории, а, кроме того, еще и открытые проблемы, предложения и опровержения. Объективное существование объектов “третьего мира” Поппер связывает с фактом материализации продуктов человеческого интеллекта в виде книг, художественных произведений, компьютеров и др. Основным аргумент в пользу автономности “третьего мира” состоит в том, что теории, идеи и художественные направления порождают следствия, например, логические возможности числового ряда, которые их создатели не в состоянии были предсказать.

Математические объекты, согласно Попперу, являются продуктами творческой деятельности математиков. В то же время они подчиняются также собственным закономерностям и поэтому могут анализироваться независимо от деятельности, результатом которой они являются. Такая трактовка третьего мира обуславливает его собственные непреднамеренные следствия, критический анализ которых приводит к новым открытиям. Вот что по этому поводу пишет сам Карл Поппер: “Натуральный ряд чисел, который мы конструируем, создает простые числа, которые мы открываем, а они в свою очередь создают проблемы, о которых мы и не мечтали. Вот именно так становится возможным математическое открытие” [144, с.478]. Эти рассуждения Поппера о независимости творческого продукта деятельности от самой деятельности позволяют понять убежденность математиков в том, что они исследуют независимую от их сознания реальность. Поппер считал, что он исправил “ошибку Платона”, лишив открытый им мир божественного и трансцендентного характера. Но по существу мир форм и идей Платона в предлагаемой Поппером классификации следует назвать нулевым миром, пребывающим вне времени и пространства как активная потенциальность. Поэтому при более широкой трактовке критического рационализма Поппера, мы по существу приходим к концепции не трех, а четырех миров. Проблема дифференциации возможных миров все еще активно обсуждается, поскольку постгёделевская математика породила серьезные сомнения в существовании непротиворечивых формальных описаний, выявив слабые стороны

аксиоматического метода. Отсюда напрашивается также вывод о том, что существует некое глубокое различие между проблемой аксиоматизации отдельного раздела математики, стимулируемой внешними процессами развития науки, и проблемой формализации внутренних процессов мышления.

Творческая составляющая не входит в структуру теории явно, однако она часто используется для обоснования теоретических положений в качестве дополнительного аргумента. Математический аппарат теории и следующие из него утверждения можно рассматривать как независимые явления специфического “бесчеловечного” третьего мира – мира идей. Необходимость “человеческой” компоненты возникает при попытке заменить формальную интерпретацию математической модели чем-то столь же понимаемым, но не столь сложно объясняемым и рационализируемым. Концепция Поппера не снимает хорошо известного в натурфилософии затруднения. Сформулируем его в виде нескольких глубоких вопросов. Почему беспонятийный мир идей действует согласно человеческим понятиям? Откуда Природа знает собственные законы, а если она их не знает, то почему известные нам законы выполняются со столь завидным постоянством? На эти вечные вопросы с помощью своей доктрины “социологического реализма” пытался ответить Рэндалл Коллинз. Свои рассуждения он начинает с расширенной, точнее социологической, трактовки *cogito*. Утверждать “я мыслю” – значит утверждать, что существуют пространство, время, язык, понятия и сообщество людей, способных их понимать. Математические объекты реальны в том же смысле, в каком реально человеческое общение. С точки зрения проблемы онтологического статуса математических объектов, можно полемизировать и с платонизмом по поводу обоснования их реальности, поскольку культивируемый в течение долгого времени взгляд на математику как на царство платонистских идеалов, с точки зрения современной философии математики, принято считать ошибочным. Теории о том, что математика – это некое трансцендентное царство платонистских объектов и собрание априорных истин, довольно привлекательны, поскольку способствуют пониманию математики как достоверного, с высокой степенью неопровержимости и истинности научного знания. Даже канторовская концепция явно восходила к учению Платона и была объявлена, в свое время, по какой-то странной причуде, материалистической.

Однако “сомнительной стороной математического платонизма, – по мнению философа Н.С. Розова, – является его плохая совместимость с историей математики” [148, с.29]. Достоверность математики объясняют иногда, образно говоря, особым социальным характером “математических сетей”. Поскольку темы все более абстрактных разделов математики были внутренними моделями предыдущих периодов развития математики, то в процедурах использования символических обозначений воплощена собственная история математики. Основное возражение в таком подходе состоит в том, что предмет познания практически сводится к средству познания. Природе ничего не нужно знать, в ней нет ни понятий, ни формул, ни чисел. В ней существуют неосознанные упорядоченности и реализуется далеко не все, что способна

описать математика. Например, когда Курт Гёдель попытался перевести метаматематические предложения в предложения арифметики, то есть “отобразить” их внутрь формальной системы, то вопросы, которые ранее приводили к парадоксам, превращались при таком отражении в неразрешимые предложения. Тем не менее, хотя открытия Гёделя в математической логике повлияли на изменение философской проблематики оснований математики в целом, они не затронули главных направлений развития математики, поскольку теоретико-множественные основания математики слишком всеобъемлющи и носят довольно общий характер, чтобы оказывать влияние на конкретные задачи большей части математики. Заметим также, что математика, по сравнению с другими науками, обладает некой “трансцендентальной уверенностью” в своей правильности.

Вплоть до XIX века под наукой понимали любую область теоретического знания и лишь спустя какое-то время это слово постепенно стало обозначать только те области знания, которые прямо или косвенно изучали физический мир. Сила математического знания в том, что чисто рациональными средствами современная математика подтвердила недостаточность рационализма. Речь идет о том, что не все истинные утверждения можно вывести из заранее определенного перечня аксиом. Среди различных теорий философии математики выделяется доктрина платонизма. Нормальный платонизм работающего математика стимулирует занятие проблемами любой сложности, поскольку никогда заранее неизвестно разрешима проблема или нет. Является ли собственная философия математики платонистской или нет, можно определить с помощью “теста Подниекса” [142, с.11]. Напомним, что простое число – это то, которое не делится ни на какое другое, кроме 1 и на само себя. Такие числа редки. Подобно золотым самородкам, они скрываются в “породах” остальных чисел. Пока простые числа невелики, они достаточно часто встречаются у истоков “великой реки” множества всех чисел, но по мере того как их величина растет, они быстро растворяются в этом “потоке”. Среди простых чисел попадаются пары таких, разность между которыми равна двум, например, (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), ... Их принято называть простыми близнецами. Немецкий математик Христиан Гольдбах более двух с половиной столетий назад предположил, что существует бесконечно много простых близнецов. Эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута.

На чем основана уверенность в том, что гипотеза Гольдбаха “объективно” должна быть истинной или ложной? Как правило, на следующем рассуждении, допускающем существование двух возможностей: либо, продвигаясь вдоль натурального ряда чисел, мы доходим до последней пары простых близнецов, либо пары простых близнецов появляются все время. Это довольно типичное рассуждение математика-платониста, оперирующего натуральными числами как особым миром, похожим на мир земных вещей, и привыкшего думать, что хорошо сформулированное утверждение должно быть либо истинным, либо ложным. Есть еще третья возможность, которую, на первый взгляд трудно себе представить: количество простых близнецов не является ни конечным, ни бесконечным. Такая возможность не столь уж удивительна, если следовать

современным представлениям о нечеткости или размытости больших совокупностей чисел, в том смысле, что система натуральных чисел содержит не только информацию о действительном мире, но и элементы нашей фантазии. Заметим, что с такой ситуацией, неожиданной для работающих математиков и важной для понимания современного развития математики, мы уже встречались, когда оказалось, что проблема континуума в принципе неразрешима. Платонистский подход предполагает, что, несмотря на неразрешимость проблемы простых близнецов “для нас, людей”, их все же конечное или бесконечное множество в мире чисел или, точнее, в мире идей, не зависящих от аксиом, используемых в рассуждениях математиков. Но это уже не математический платонизм, а философский, беспредметный с точки зрения математики.

Мы опять возвращаемся к вопросу: что есть математика? Если нет ответа на этот вопрос, то тогда утверждение, что никакая фиксированная система аксиом не в состоянии представить богатство математики полностью, просто некорректна. Подлинного мира математики, не зависящего от аксиом, с помощью которых он строится и исследуется, в современной математике не существует. При постановке проблем и выдвижении гипотез Давид Гильберт руководствовался не только собственным опытом, основанном на математической и философской интуиции, но и коллективным опытом математического сообщества. Не умаляя гениальности самого Гильберта и мощи его интуиции, следует отметить, что успех его математических проблем отчасти объясняется особенностью исторического периода развития математики начала прошлого века, когда основные факторы развития математики имели внутреннее происхождение и их возможно было предвидеть крупнейшим математикам того времени. Вполне возможно, что период гладкого развития математического знания закончился. “Если это так и математика оказалась в точке бифуркации, – рассуждает по этому поводу С.С. Демидов, – то судить о том, какой она будет завтра, представляется деятельностью, обреченной на неуспех” [49, с.24]. Но если точка бифуркации пройдена или ее вовсе пока не было, то новые попытки обозрения проблем современной математики могут оказаться вполне удачными. Но в начале XXI века это под силу уже лишь коллективным усилиям ведущих математиков мирового математического сообщества. При решении методологических вопросов опасно давать волю платонистским привычкам. Процедура конструирования абстрактных понятий способна порождать и сомнительные математические конструкции.

Это побудило Иммануила Канта исследовать вопрос о существовании критерия, который позволил бы исследователям из возможных рассудочных понятий выделить те, которые не приведут к появлению математически противоречивых объектов. Согласно Канту, роль критерия может исполнять не логика, а чистое созерцание, то есть априорная интуиция. Он был уверен, что для математики этот критерий достаточен, как и критерий опыта для разума в эмпирическом применении. Для Иммануила Канта – одного из первых философов, понявших ньютоновскую механику, пространство – это априорная

форма внешнего чувственного созерцания, а время – априорная форма внутреннего чувственного созерцания. Принято считать, что он учил идеальности пространства и времени, и что это было фундаментальным аспектом его учения. Как и большую часть философско-математического учения Канта, его на существовавшем в то время уровне развития науки, нельзя было ни подтвердить, ни опровергнуть. Однако уже в XIX веке математическая практика, вопреки кантовскому критерию оценки математической достоверности, создала такие примеры и теории, которые не поддавались интуитивному контролю. В 1890 году итальянский математик Джузеппе Пеано доказал, что геометрические фигуры, вычерчиваемые движущейся точкой, то есть кривые, могут включать в себя целые участки плоскости. Такое движение не постигается интуицией, его можно понять только с помощью логического анализа. Поэтому математические интуиции, как “совокупность разнообразных взаимодействующих установок”, не постоянны, они пополняются, развиваются и обогащаются новыми идеями вместе с абстрактными разделами, устраняющими из теории все несущественное. Более того, хотя интуиция и стоит за естественным различием между природой изучаемого объекта и духом, она не может возникнуть в продвинутых абстрактных разделах математики без глубокого знания изучаемых объектов.

Даже понимание сути математических проблем зависит от того, какой именно смысл вкладывается в ту или иную гильбертовскую формулировку. Так, например, по-разному понимали смысл тринадцатой проблемы Гильберта, с одной стороны, академики А.Н. Колмогоров и В.И. Арнольд, а с другой, академик А.Г. Витушкин. Общее алгебраическое уравнение специальной подстановкой, которая записывается в радикалах, приводится к более простому виду. В частности, общее алгебраическое уравнение 7-й степени приводится к виду $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$, то есть решение общего уравнения 7-й степени является суперпозицией арифметических операций, радикалов и функции f , зависящей от трех переменных x , y и z . Гипотеза Гильберта под номером 13 в списке его проблем формулируется так: “уравнение седьмой степени неразрешимо с помощью каких-либо непрерывных функций, зависящих только от двух аргументов”. В результате совместной работы Колмогорова и Арнольда было доказано, что гипотеза Гильберта ошибочна. Основопологающим результатом стала работа Колмогорова, который в 1956 году доказал, что всякая непрерывная функция n переменных представляется в виде суперпозиции непрерывных функций от трех переменных. Будучи еще студентом В.И. Арнольд в 1957 году усовершенствовал колмогоровскую конструкцию и усилил этот результат, снизив число переменных до двух. Безусловно, что этот цикл работ стал математической сенсацией. Спустя несколько лет было доказано, что в их конструкциях представляющие функции не могут быть гладкими даже в том случае, когда речь идет о представлении аналитических функций. Это обстоятельство расширяет диапазон вопросов в этой проблеме Гильберта. Поэтому, считает А.Г. Витушкин, “можно рассчитывать на положительное решение проблемы, то есть возможно, что решение уравнения 7-й степени не представимо суперпозицией функций от

двух переменных, разумеется, в предположении гладкости или аналитичности этих функций” [37, с.198]. Важнейшей особенностью почти всех абстрактных множеств, встречающихся в математике, является их бесконечность. Это связано с характерной чертой математики – идеализацией рассматриваемых объектов.

После открытия парадоксов канторовской теории бесконечных множеств у философов и у части математиков возникло убеждение, что и в математических теориях могут быть спрятаны противоречия, даже если они пока и не обнаружены. Именно поэтому некоторый период философии математики определялся исследованиями по основаниям математики с целью преодолеть парадоксы теории множеств и запретить виновные в этом способы рассуждений. Проиллюстрируем сказанное на другом примере – истории становления современного математического понятия линии. Большинство математиков ограничивают сами себя жесткими рамками “мира понятий”, который, в сущности, они нашли “почти готовым”, когда принимались за свои ученые изыскания. Редко кто отваживался внести существенные изменения в устройство понятийного инструментария или методологических приемов математики даже под настойчивым давлением внутринаучных обстоятельств, а, взявшись за это, ощущал некоторый дискомфорт из-за недостатка благоговения к общепринятой традиции, в которую его пока еще сомнительное новшество привносит некоторый беспорядок. Несмотря на то, что большинству из нас интуитивно ясно, что следует называть линией или кривой, достаточно общее, строгое и полное определение этого понятия стало возможным только благодаря современной топологической терминологии. История понятия кривой насчитывает более двух тысяч лет. Евклид в своих “Началах” определял линию как “длину без ширины” или “как границу поверхности”.

С точки зрения современных канонов математики это определение нельзя считать ни строгим, ни корректным, поскольку понятие линии определяется через другие неопределенные понятия, как длина, ширина и граница. Справедливости ради надо заметить, что Евклид ограничивался изучением прямой и окружности, поэтому сформулированные определения ему не мешали, хотя и не очень то и помогали. Распространено мнение, что первичные математические понятия являются совершенно очевидными, а менее очевидные высказывания доказуемы с помощью логических рассуждений. Но в действительности дело обстоит не так просто. Если математические истины убедительны, когда они выведены из постулатов с помощью строгой логики, то в чем гарантия истинности самих исходных постулатов? Как говорили древние римляне, “кто засвидетельствует, что свидетели не лгут?”. Относительно строгое общее определение линии на плоскости предложил в первой половине XVII века Рене Декарт. Он определял ее как “множество точек плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$, где f – некоторая функция двух переменных”. К сожалению, определение Декарта включает в себя объекты, которые никак нельзя считать линиями. Например, если $f(x, y) = x[y]$, где $[y]$ – целая часть числа y , то уравнению $x[y] = 0$ удовлетворяет множество точек на плоскости $\{(x, y): x \in \mathbf{R}, y \in [0, 1)\} \cup \{(x, y): x$

$= 0, y \in \mathbf{R}\}$, которое даже средне образованные люди не решатся назвать линией. Тем не менее, это определение сыграло важную роль в геометрии при исследовании различных классов кривых, хотя его нельзя считать полным и окончательным.

По мере развития теоретической части анализа и появления “патологических” кривых все больше назревала необходимость выработать строгое общее определение кривой, поскольку опровергающие примеры не решали проблемы по существу. Вопреки всяким ожиданиям, эта задача оказалась нелегкой. В конце XIX века Камил Жордан предложил общее параметрическое определение плоской линии согласно которому, “линией называется множество точек плоскости, координаты которых являются непрерывными на некотором сегменте $[a, b]$ функциями параметра t , то есть $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a, b]$ ”. Это определение отражало представление о линии как о траектории движущейся точки и было хорошо приспособлено для нужд математического анализа, дифференциальной геометрии и математической физики. При этом каждая кривая Жордана являлась кривой Декарта. Достаточно было по непрерывным функциям φ и ψ задать функцию f следующим образом: $f(x, y) = \min\{(x - \varphi(t))^2 + (y - \psi(t))^2 : t \in [a, b]\}$. Но даже этот, на первый взгляд естественный, подход к определению линии обладает существенным недостатком. Оказалось, что непрерывными образами отрезка являются, например, квадрат, сфера, шар и другие многомерные фигуры. Впервые этот удивительный факт был установлен в 1890 году итальянским математиком Джузеппе Пеано. После того, как Джузеппе Пеано показал, что существуют линии Жордана, которые полностью заполняют квадрат, что никак не согласуется с нашим интуитивным представлением о линии, другой подход к определению понятия линии в терминах разрабатываемой им теории множеств выбрал немецкий математик Георг Кантор. Он определил плоскую линию как “континуум, не имеющий внутренних точек”. Следует уточнить, что под математическим континуумом в топологии понимается компактное связное множество.

Кривая Пеано, с точки зрения определения Кантора, линией не является, поскольку ее графиком является квадрат, который представляет собой континуум, но любая точка этого квадрата, которая не лежит на его стороне, является внутренней для него. Можно сказать, что момент, когда математику “открывается” ошибка в работе, можно назвать решающим в исследовании. Для всякого математического труда, связанного с открытием, это, возможно, момент истинного творчества, обновляющего знание. Поэтому боязнь ошибки в научном познании, по сути то же самое, что боязнь истины. Известны даже необходимые и достаточные условия, когда линия Кантора является линией Жордана. Однако, хотя определение Кантора наиболее полное и строгое для ограниченных плоских линий, оно мало пригодно для конкретных применений и на практике пользуются определениями Декарта или Жордана. С точки зрения философских проблем современной математики термин “кривая”, вообще говоря, никогда не сможет полностью перейти из сферы интуитивного понимания в абстрактную сферу логического понимания. Это, как считает

философ математики В.Н. Тростников, не произойдет потому, что “математика и логика не ставят целью подавление нашей интуиции” [159, с.36]. В нашем понимании существуют две “кривые” – общезыковая и математическая – как дополнительные понятия, которые выполняют разные методические функции. Разобранную ситуацию с эволюцией понятия линии можно рассматривать как проявление характерной для всей математики дихотомии ценности математических результатов: “строгое – интуитивное”, “простое – сложное”, “полное – неполное”, “конкретное – абстрактное”, “практичное – непрактичное”.

Немецкий математик Феликс Клейн по этому поводу сказал: “Всякий знает, что такое кривая, пока не выучится математике настолько, что вконец запутается в бесчисленных исключениях” [93, с.8]. Заметим, что определение Кантора непригодно для пространственных кривых, притом, что для плоской линии оно является наиболее полным и строгим. С интуитивной точки зрения линия должна быть одномерным образованием, возможно, что, пытаясь выразить эту идею, Евклид определял ее как “длину без ширины”. Задача определения линии для пространственных кривых как “одномерного континуума” была окончательно решена в 20-х годах XX века русским математиком П.С. Урысоном в рамках созданной им теории размерности. В это определение входит непростое понятие размерности компакта, которое можно охарактеризовать, пользуясь только его топологией или метрикой соответствующего метрического пространства. Другой путь определения кривой, использующий идею многообразия, состоял в том, чтобы его естественным обобщением было определение поверхности, трехмерного тела и так далее, но принятое сейчас определение многообразия доступно только математику достаточно высокой квалификации. К этому можно добавить, что когда математик вводит новые понятия или уточняет в духе новых стандартов строгости уже известные понятия, он в некотором роде изобретатель. В то же время, как уже отмечалось выше, математики в своих лучших достижениях больше похожи на открывателей. Самые простейшие математические понятия, например, понятия числа, линии, множества, привели к таким глубоким проблемам, что математики до сих пор смогли справиться лишь с небольшой их частью. Поэтому “открытие” теорем в работе математиков играет, судя по всему, более значительную роль, чем “изобретение” новых понятий. В математике взаимодействуют две сферы: сфера творческой деятельности, открытий, содержательных приложений и сфера теоретической рефлексии математики, в которой ведутся поиски логических отношений и аксиоматических представлений процессов абстрагирования.

Математик, вообще говоря, даже не конструирует теоретические факты, не изобретает их, а, образно говоря, обретает, поскольку возможны различные варианты доказательства одного и того же математического утверждения. Возрастающая сложность науки и ее приложений приводит к определенной привлекательности внутренних проблем теоретической математики по сравнению с традиционными задачами, предлагаемыми естественными науками. Например, предметом интенсивных исследований в первой половине

XX века стали банаховы пространства, открытые крупнейшим польским математиком Стефаном Банахом в начале 20-х годов. Затем интерес к этому классическому разделу линейного функционального анализа упал, поскольку накопившиеся нерешаемые трудные проблемы, поставленные классиками, ограничивали применение этой теории к другим разделам математики. “Результатом “Великой Французской Революции”, вновь пробудившей интерес к этой области математики, стало доказательство ряда труднейших проблем теории банаховых пространств” [116, с.159]. Математической сенсацией стало отрицательное решение Пером Энфло в 1973 году знаменитой проблемы о существовании базиса. В результате этой работы можно было выделить широкий класс банаховых пространств, обладающих специальными базисами Шаудера. Развитие этого раздела функционального анализа стимулировалось искусственным построением весьма неожиданных контрпримеров, часто в довольно “исхоженных” и традиционных областях математики. Среди последних результатов в этом направлении выделим один из результатов Тиммоти Гоуэрс, который был получен в 1996 году [185]. Согласно известной в теории множеств теореме Бернштейна, называемой также теоремой Кантора-Бернштейна и теоремой Шрёдера-Бернштейна, два множества, каждое из которых равномощно подмножеству другого множества, равномощны. Проблема Шрёдера-Бернштейна для банаховых пространств, являющаяся аналогом указанной теоремы, получила довольно неожиданное решение. Проблема Шрёдера-Бернштейна формулируется следующим образом: будут ли два банаховых пространства, каждое из которых изоморфно подпространству другого пространства, изоморфны между собой? В это трудно поверить, но Тиммоти Гоуэрс построил примеры неизоморфных банаховых пространств, удовлетворяющих условию Шрёдера-Бернштейна для банаховых пространств. Интуиция здесь бессильна.

С точки зрения истории науки, математика не очень склонна терпеть неразрешимые предложения. В конце концов, такое предложение после многократного успешного употребления можно возвести в ранг аксиомы. Такова, например, в абстрактной математике судьба аксиомы выбора и гипотезы континуума. Множества слишком абстрактные математические объекты для того, чтобы вопрос: “что же это такое на самом деле?” имел смысл. В работе Георга Кантора 1878 года была сформулирована следующая “континуум-гипотеза”: всякое подмножество отрезка либо конечно, либо счётно, либо равномощно всему отрезку. В эквивалентной формулировке это означает, что между счетными множествами и множествами мощности континуума нет множеств промежуточной мощности. Заметим, что любое замкнутое подмножество прямой либо конечно, либо счётно, либо имеет мощность континуума, то есть для замкнутых подмножеств прямой гипотеза континуума верна. Кантор, доказав это факт, пытался найти доказательство континуум-гипотезы для общего случая. Лишь во второй половине XX века стало ясно, что утверждение континуум-гипотезы можно считать истинным или ложным. При этом получают разные теории множеств. Тут опять можно провести аналогию с евклидовой и неевклидовой геометриями. Если “пятый

постулат Евклида”, утверждающий, что через данную точку проходит не более одной прямой, параллельной данной, считать истинным, то получится геометрия, называемая евклидовой. Если в качестве аксиомы принять противоположное утверждение, то получится неевклидова геометрия. Одно из распространенных заблуждений состоит в том, что в неевклидовой геометрии параллельные прямые пересекаются. Это не так – параллельные прямые в евклидовой и в неевклидовой геометрии определяются как прямые, которые не пересекаются. Вопрос о том, какая геометрия “на самом деле” правильна, не является математическим вопросом. Его лучше задавать физикам. Еще в большей степени это относится к теории множеств. Например, Георг Кантор обсуждал некоторые вопросы теории множеств с профессионалами-теологами.

Одним из проявлений процесса абстрагирования является деятельность в математике, стимулирующая новые теории, которые не помещаются в рамки уже сформированных исследовательских программ. Поскольку в теории множеств не существует объемлющей все области математики “универсальной” аксиоматики, то в математике могут появиться новые аксиоматические системы. И тогда опять придется рассматривать новую проблему континуума. Следует отметить, что на протяжении всей истории математики постоянно происходило открытие новых объектов, обладающих свойствами, которые на то время были непривычными для математического мышления. Например, аксиому выбора некоторые математики считали неприемлемой именно из-за ее странных и парадоксальных следствий. Но математики всегда готовы к тому, чтобы сделать на некоторое время “шаг в сторону” от неразрешимых на данный момент проблем, то есть попытаться обойти их. Хотя ни один работающий в абстрактных областях науки математик не может поручиться за абсолютно убедительную приемлемость аксиомы выбора, при необходимости он все же, глядя на других, пользуется ею для получения нужного ему результата. С таких удивительных признаний неопределенности и неполноты знания очень часто начинался процесс обобщения в математике. Впечатляющие примеры современных теорий представляют такие разделы абстрактной математики как функциональный анализ, общая топология и алгебраическая геометрия. Веря в определенность развития математики и предостерегая от обобщательского пафоса, следует заметить, что каждая математическая дисциплина эволюционирует от зарождения к расцвету, когда выполняется большая часть исследовательской программы, и далее стремится к “нирване”, когда полученные результаты будут “отлиты” в максимально общие формы, и здесь очень важно для математиков не спутать триумф с поражением. В современной математике важны не столько математические доказательства, необходимые для человеческого ума как “тропинки” к истине, а ценны принципиально новые теоретические факты, предлагаемые нашему созерцанию.

Поэтому, можно сказать, что платонизм правдоподобен, когда мы мыслим о математической истине, но он, вообще говоря, бесполезен, когда мы говорим о математическом познании. Намеренно обостряя эту проблему, известный американский философ математики Поль Бенацераф в этапной работе

“Математическая истина” (1973) сформулировал свою теоретико-познавательную дилемму, стимулировавшую развитие исследований по философии математики в последней четверти XX века. Смысл ее состоит в том, что если математика представляет собой исследование объективных сущностей и если когнитивные способности человека позволяют ему познавать только чувственные объекты, то, как он тогда познает математические объекты? По существу, это проблема несовместимых онтологий, конфликт которых один из самых старых в философии математики. Именно Платон – один из первых философов, который пытался создать правдоподобную эпистемологию для математической теории. В сформулированном виде дилемма Бенацера звучит, с одной стороны, несколько неопределенно, а с другой стороны, все же достаточно жестко, и поэтому при широкой трактовке она даже может потерять смысл. Например, об “объективных идеальных сущностях” целесообразнее говорить в контексте первичных фундаментальных математических понятий, а “познание только чувственных объектов”, предполагает определенную причинную концепцию познания, но это ведь не единственная теория. Математика сама по себе не представляет системы абсолютного знания, поскольку, как результат искусства анализа и вычисления, служит определенным целям лишь косвенно и опосредованно. Однако, согласно воззрениям Иммануила Канта, математическое познание, дополненное “мудрым знанием мира”, то есть философским познанием, занимают две области всего априорного, или доопытного, познания.

Один из вариантов переформулировки теоретико-познавательной дилеммы ставит перед философами математики выбор: “либо отрицать, что математика говорит о числах, либо предполагать некоторые неестественные способности человека в отношении сбора информации” [170, с.143]. Надо признать, что ни та, ни другая возможности не выглядят привлекательными для математиков, поэтому и в этом утверждении можно провести некоторую “онтологическую разрядку”. Не вдаваясь в эту философскую полемику, обратим внимание на мнение влиятельной группы математиков, объединившейся под именем Бурбаки, которая считает, что математика говорит не о специфических математических объектах, а о структурах. Философские проблемы структурализма, как направления математики XX столетия, заслуживают отдельного рассмотрения. Французский математик Рене Том считает, что одно из важнейших философских утверждений, на которые должна опираться современная математика, – это утверждение о существовании математических структур независимо от человеческого разума. Это положение он объясняет тем, что старые надежды бурбакистов – показать, как математические структуры естественно вытекают из иерархии множеств, их подмножеств и их комбинаций – это, безусловно, химера. Поэтому нельзя ни по каким разумным причинам отказаться от мысли, что важные математические структуры (алгебраическая, топологическая и др.) существуют во внешнем мире, и их огромное многообразие находит единственное оправдание в реальности. Если же математика – это не более, чем игра ума, то как объяснить неоспоримые ее успехи в описании действительности? Сама группа Бурбаки уклоняется от

ответа на этот вопрос, заявляя о своей некомпетентности. Исходной точкой научного исследования является не собирание единичных фактов, хотя они играют важную роль, а догадка, предположение, гипотеза, рождаемые благодаря интуиции.

Отдельные факты могут подтвердить или опровергнуть гипотезу, точнее дедуктивно выводимые из нее следствия. Например, новая теория в опытных науках – это, прежде всего, смелое предположение, а не выжимка из фактов и наблюдений в духе ранее существовавших теорий. Поэтому, согласно Попперу, она обязательно нуждается в проверке, которая должна ее либо “верифицировать”, что означает установить ее истинность, либо “фальсифицировать”, то есть установить ее ложность. Надо заметить, что предложенный Карлом Поппером термин “фальсифицировать”, означающий по-русски “подделывать или искажать, выдавая за подлинное”, звучит несколько двусмысленно и изначально вызывает естественное непонимание его сути. Асимметрия верификации и фальсификации проявляется в том, что окончательная верификация теории, в отличие от фальсификации, невозможна. Теория, согласно Попперу, всегда остается гипотезой. Карл Поппер допускает, что может существовать некий вид платоновского третьего мира и, что хотя этот мир есть продукт человеческой деятельности, существует много теорий самих по себе и проблемных ситуаций самих по себе, которые, возможно, никогда не будут созданы или поняты людьми. В этом смысле рассуждения Поппера о “третьем мире” согласуются с мнением Тома. В тоже время надо отметить, что есть принципиальные неясности с природой автономных логических законов третьего мира Поппера, управляющих математическими объектами. Кроме того, непонятно, почему все же при изучении математических объектов “третьего мира” получаются результаты, применимые в познании физического мира и практической деятельности. Неудивительно поэтому, что некоторые философы считают, что предполагаемые платонистские сущности могут быть доступны познанию.

Познание, как приобретение знания о реальном мире, обычно отождествляется с представлением о познании законов, действующих в природе. Например, Карл Поппер, считающий себя критическим реалистом, предполагал, что можно принять тезис о подлинном существовании законов, задающих существование Вселенной. Никто не станет отрицать, говорит математик и философ А.Н. Паршин, “что платонизм поставил в рамках человеческого познания вопрос о существовании умопостигаемого сверхчувственного мира и о его связи с миром чувственным” [129, с.57]. С другой стороны, платонизм в математике, в некотором смысле, ограничивает свободу, если его понимать как умозрительное видение идеальных структур. Тем не менее, именно Георг Кантор провозгласил принцип, согласно которому “сущность математики заключается именно в ее свободе”. Однако же сам Кантор неоднократно говорил, что свобода математики – это вовсе не произвол. Вся история математики показывает, что такого никогда и не было. Принцип Кантора не стесняет математического творчества, тем самым как бы

оправдывая обоснованные абстрактные построения новых теорий. Для математиков-практиков “факты” – это такое математическое знание, которое включает в себя установившиеся теории с доказанными в них теоремами. В каждый исторически значимый период развития математики нужно было решать какие-то определенные задачи, сформулированные в это или предшествующее ему время. Наиболее убедительно и довольно смело это было сделано самим Георгом Кантором.

В восьмом параграфе своего математически-философского опыта в учении о бесконечном “Основы общего учения о многообразиях” Георг Кантор пишет: “Математика в своем развитии совершенно свободна и связана лишь тем само собой разумеющимся условием, что ее понятия должны быть свободны от внутренних противоречий и должны также находиться в неизменных, установленных отношениях к образованным раньше, уже имеющимся налицо испытанным понятиям” [74, с.326]. Кантор считал, что каждое математическое понятие содержит в самом себе “необходимый корректив”, поскольку неплодотворность понятия весьма скоро обнаруживается его полной непригодностью. Поэтому, считал он, гораздо большая опасность заключается в излишнем ограничении математического творчества, поскольку в пользу таких ограничений трудно привести доводы, исходя из сущности математического знания. Вырванную из контекста “свободу” математического творчества довольно часто цитируют специалисты по основаниям математики и некоторые философы математики. Однако после того, как первоначальную канторовскую концепцию теории множеств приходилось несколько раз “косметически ремонтировать” в ущерб ее естественности и простоте, крылатое выражение Кантора “суть математики в ее свободе” утратило свой романтический смысл и стало в последнее время выходить из употребления.

Поскольку цели рационального исследования не единственные наши цели, включающие и сохранение свободы, и социальную справедливость, и многое другое, то, следовательно, они не могут полностью определять развитие науки. Социологический реализм утверждает, что существуют ментальные и физические реальности в соразмерных человеку времени и пространстве. Проблемы возникают лишь с утверждениями о реальности, лежащей за пределами соразмерного человеку времени, то есть в мире теоретических естественнонаучных и математических объектов. Математики высокого уровня интуитивно чувствуют некую метрику, объединяющую идеи пространства мышления, что позволяет им перекидывать мостки между разными разделами математики. Речь идет о “чувстве математической близости” теорий или их теорем. Интерес к представлению о метрике пространств математического мышления стимулировался в связи с проблемой искусственного интеллекта. Вся математика является сетью взаимосвязанных результатов. Иногда две теоремы в математике близки между собой, потому что одну из них легко доказать, пользуясь доказательством другой. Иногда две идеи близки между собой, потому что они в чем-то аналогичны. Уместно заметить, что слово “близкий” в математике имеет много содержательных аналогов. Вообще

говоря, трудно представить существование даже множества качественно различных пространств, поэтому о различных геометриях иногда говорят как о разных грамматиках, необходимых для понимания мира.

Теоретическая математика возникает как полностью самостоятельная сущность тогда, когда в ней систематически используются все типы доказательств, включая доказательство от противного, примененные к объектам специального вида, в которые включена математическая бесконечность. И первыми такими объектами были некоторые простейшие иррациональности. Одной из характерных особенностей исторического процесса является то, что ни одно из событий не повторяется в деталях дважды. Поэтому возникновение абстрактной математики, как событие исторического процесса, также не имеет точного “двойника”. Однако приблизительный аналог этого феномена, возможно, есть и в математике Нового времени, а именно, формирование аксиоматических построений, охвативших большинство разделов математики и способствовавших стремительному развитию теоретических конструкций. Все объекты математики, начиная от натуральных чисел и кончая группами, топологическими векторными пространствами и категориями, абстрактны. Уточним, что понимается под абстрактным определением на примере понятия группы. Понятие группы ввел в современную математику французский математик Эварист Галуа между 1830 и 1832 годами. Он использовал свойства групп, чтобы получить ответ на вопрос, который до него пытались решить многие математики в течение 200 лет. Его можно сформулировать следующим образом: можно ли выразить решения алгебраических уравнений пятой и более высокой степени формулами, подобными известным формулам для решений квадратных уравнений, кубических уравнений и уравнений четвертой степени? Ответ оказался отрицательным. Поразительно то, что группы встречаются повсюду в математике, хотя сам Эварист Галуа первоначально имел в виду их конкретное применение к алгебраическим уравнениям.

Группой является обычная система целых чисел с операцией сложения. По существу, правила действий с элементами группы, соответствующим образом обобщенные, заимствованы из арифметики. Согласно формальному математическому определению группа – это множество с некоторой операцией, удовлетворяющей “легко забываемым аксиомам”. Такое определение вызывает естественный протест: зачем здравомыслящему человеку такая непонятная операция? Более мотивированным является подход, при котором начинают не с группы, а с понятия преобразования взаимнооднозначного отображения множества в себя, как это и было сделано исторически. Тогда набор преобразований какого-либо множества можно назвать группой, если вместе с любыми двумя преобразованиями он содержит результат их последовательного применения, а также вместе с каждым преобразованием содержит и его обратное преобразование. Так называемые “аксиомы” – это в действительности очевидные свойства групп преобразований и никаких других “более абстрактных” групп в природе не существует. Второй отличительной чертой математики является то, что все ее предложения относятся к бесконечному

множеству объектов, а точнее классам, содержащим бесконечное множество объектов. Единственным общепринятым способом установления истинности математических утверждений является доказательство. В те времена, когда в математике еще не существовало определения доказательства, в современном смысле этого слова, некоторые заведомо важные математические понятия владели довольно сомнительное существование. Доказательство выявляет связи между предложениями, показывает, от каких предложений зависит данное и какие предложения вытекают из него. Вообще говоря, существуют два вида доказательств: экзистенциальные и конструктивные. Возможность доказывать существование математических объектов без необходимости предъявлять их – одна из отличительных черт современной математики.

Однако свободное использование чисто экзистенциальных рассуждений, например, с использованием аксиомы выбора, позволяют доказывать существование очень странных объектов, таких как неизмеримые множества, противоречащих интуиции здравого смысла. С другой стороны, если предположить, что в интуитивных математических понятиях скрыты какие-то аспекты, которые могут не проявляться довольно долго в “реальной” математической практике, то это по существу все тот же математический платонизм, рассматривающий мир математических объектов, как независимый от рассуждений математиков. К последнему утверждению следует относиться с некоторой долей скептицизма. Например, полное доказательство классификации простых конечных групп, полученное в начале 80-х годов XX столетия, занимает примерно 10-15 тысяч журнальных страниц. Эта работа была проделана объединенными усилиями более ста математиков и опубликована на страницах различных научных журналов примерно в 500 статьях. Американский математик Дэниел Горенштейн, сыгравший решающую роль в доказательстве этой грандиозной теоремы, разрабатывает классификационное доказательство второго поколения. “Если наша работа увенчается успехом, – пишет он, – то доказательство второго поколения составит лишь одну пятую первого и приобретет во столько же раз большую идейную ясность” [47, с.74]. Однако по любым математическим стандартам доказательство в 3000 страниц все равно будет слишком длинным и необозримым. Хотя применение этой классификации за пределами математики пока еще не столь значительно, в математике этот результат уже нашел применения в разных областях.

Поскольку значимое дедуктивное доказательство, базирующееся на истинных посылах, не может приводить к ложным заключениям, то, критикуя теорию, мы тем самым пытаемся показать неудовлетворительность ее самой или ее следствий, принимаемых за истину, в контексте ее будущих приложений. Стремление онтологизировать первичные математические понятия обусловлено самой спецификой становления математического метода. Оно совпадало с интересами математиков, которые старались использовать, по возможности, наименьшее число исходных принципов при формулировке математической задачи. Математики, как бы парадоксально это ни звучало, ради “чистоты” результата сознательно ограничивали себя миром математических понятий, даже специальным миром определенных

математических моделей. Исследование таких моделей, абстрагированных от их отражающих аспектов, становилось для них самоцелью. В этом одна из основных причин платонистского отношения математиков к объектам своих исследований. Возможно, что именно в этом источник творческой силы математики, названный Юджином Вигнером непостижимой эффективностью математики. “С одной стороны, – говорит он, – невероятная эффективность математики в естественных науках есть нечто граничащее с мистикой, ибо никакого рационального объяснения этому факту нет. С другой стороны, именно эта непостижимая эффективность математики в естественных науках выдвигает вопрос о единственности физических теорий” [32, с.536]. Высказывания в таком духе свидетельствует о живучести платонистского взгляда на математику, особенно среди тех, кто глубоко не знает методологических проблем современной математики. Современная математика в основном развивается в рамках аксиом теории множеств, предложенных Цермело и Френкелем, или как ее еще называют – аксиоматике ZF.

Система аксиом Цермело-Френкеля была создана для спасения интуитивной теории множеств Кантора, после того как та “запуталась” в парадоксах, в ситуации, когда соответствующая аксиоматизация явилась единственным выходом из создавшегося положения. Курт Гёдель показал, что нельзя доказать непротиворечивость аксиоматики ZF, не выходя за рамки формализма этой теории. Он же показал, что из непротиворечивости аксиоматики ZF следовала бы непротиворечивость аксиоматики, полученной из аксиом Цермело-Френкеля с добавлением аксиомы выбора, то есть аксиоматики ZFC. С большой долей уверенности можно утверждать, что значительная часть математиков, профессионально не занимающаяся вопросами математической логики, которая применяет теоретико-множественные методы, работает в рамках аксиоматики ZFC. Почему математика столь часто оказывается применимой к естественному, несимволическому миру? Почему она стала столь полезной в естествознании? Это будет уже не столь таинственным, как только мы осознаем всю силу того факта, что математика является частью природного мира. Многие философы нефундаменталистского направления пытаются совместить отказ от наивного реализма и платонизма с социальной сконструированностью знания, но необязательно при этом сводить реальность математических объектов к коммуникативным операциям, то есть реальность объектов познания к его средствам. Мироззрение, которого придерживаются современные математики, можно охарактеризовать как “умеренный скептический платонизм”, который принципиально расходится с “математическим платонизмом”, предполагающим, что математика сможет ввести нас в мир абсолютных идей, поскольку именно там существуют математические понятия.

Это не только завышенная самооценка человеческого мышления, но и профанация платоновского взгляда на научное познание. Столь же критически относятся современные ученые-математики и к философским воззрениям Канта. Граница между тем, чем мы обладаем априори, и тем, для чего необходим опыт, проводится в современном математическом познании иначе,

чем у Иммануила Канта. Для многих философов синтетические априорные суждения Канта продолжают служить доводом в пользу платонизма. Однако Давид Гильберт считал, что Кант сильно переоценил роль и масштабы априорного. Занимая позицию априоризма, необходимо быть крайне осторожным. Например, уже в XIX веке многое из того, что считалось во времена Канта априорно истинным в математике, было признано ошибочным. Сам Гильберт возлагал большие надежды на свой план обоснования математики, надеясь составить полный конечный набор современных правил вывода математических доказательств, который оказался нереализуемым в полном объеме. Фундаментальная тема соотношения дополнительных понятий интуитивного и формального, рационального и иррационального берет начало в философии древних греков. Английский филолог-классик Эрик Доддс, проанализировав мифы об исключительной рациональности древних греков, выявил огромное значение иррациональных моментов в их жизни. Неожиданное продолжение эти наблюдения получили в новой области математического знания – теории фракталов, которая смещает познавательные установки от строгой рациональности к интуитивно-образному мышлению. Фрактальную геометрию можно отнести к постнеклассической математике, возникшей в конце XX века.

В истории современной математики, берущей начало в XVII веке, неоднократно менялись представления о фундаментальных теориях математического знания. Например, во фрактальной геометрии, в духе платонистской интерпретации, есть неизменные идеальные объекты – алгоритм, фрактал, мыслимый как завершенное целое, – но основная особенность их в том, что невозможно выделить части, совпадающие с целым, то есть у них нет структуры как связи элементов. Поэтому можно предположить, что фрактальная геометрия – это новый взгляд на сущность природы математики с точки зрения неплатонистской математики. Благодаря работам Курта Гёделя мы можем утверждать, что никогда не будет существовать абсолютного метода создания нового математического знания. В философии математики обсуждаются эпистемологические различия между ситуациями, сложившимися в геометрии после открытия “недоказуемости” пятого постулата Евклида и в теории множеств после получения Куртом Геделем и Полем Коэном результата о “недоказуемости” континуум-гипотезы Кантора. Возникающие, в связи с этим, вопросы о построении разных геометрий и возможных теорий множеств можно отнести к проблемам “математического реализма”. Вопрос об истинности определенной геометрической теории решается в рамках физической реальности, но объекты теории множеств не принадлежат ей. Поэтому, несмотря на “удаленность” аксиом теории множеств от чувственного опыта, математической интуиции как дополнительному способу описания математики доверяют не меньше, чем тем восприятиям, которые приводят физиков к построению физических теорий в надежде, что будущий чувственный опыт будет согласован с ними.

Можно различать две математики: во-первых, науку, создаваемую самими математиками, и, во-вторых, математику, опосредованно выражающую

свойства реального мира, которая для платоников существует в особом мире математических идей. Сходную позицию на концепцию двух математик занимали и неоплатоники, для которых математические сущности обладали реальностью до всякого их рационального конструирования. Если мы выходим на метауровень за пределы наших математических конструкций, то мы тем самым уже вносим элемент иррациональности. При этом, по мнению Геделя, математическая интуиция необязательно должна мыслиться как способность непосредственного знания, например, о множествах, поскольку и в физическом знании есть что-то, выходящее за пределы чувственного восприятия и являющееся, в определенном смысле, “непосредственно данным”. Результаты Курта Геделя позволяют по-новому взглянуть на стародавнюю проблему чистоты метода, уходящую корнями во времена древних греков. Из его работ следует, что арифметическая чистота недостижима, даже с учетом любых неточностей в понятии чистоты метода, хотя, с другой стороны, логическая чистота может быть в принципе достигнута. Обсуждая вопрос о возможности чистоты метода, Георг Крайзель приходит к противоречивому выводу о том, что более тщательное рассмотрение рассуждений Геделя подсказывает: “Сам идеал чистоты метода сомнителен, даже когда он может быть достигнут” [91, с.189]. По поводу развернувшейся дискуссии в начале XX века о программе доказательства непротиворечивости, согласно которой финитистские теоремы должны иметь финитистские доказательства, типичным примером которых является школьная математика, можно сказать, что в современной математике ограничение только “чистыми” методами нуждается в оправдании в той же степени, что использование “нечистых” методов.

Один из основных выводов современной философии математики состоит в том, что истинность теоремы, точнее, истинность доказательства, – это лишь часть знания, содержащегося в доказательстве, и хотя эту часть проще всего изложить словами, ее невозможно выразить в терминах истинности. В современной математике до сих пор существуют нерешенные проблемы, например, в теории чисел, иногда очень простые по формулировке, ответы на которые как бы однозначно предопределены принятой системой аксиом. Тем не менее, их решение до сих пор не найдено. В связи с этим, возникает вопрос: почему так происходит? Он содержит следующие альтернативы – либо эти проблемы требуют очень длинной цепочки рассуждений, либо для их решения необходимы новые, не употреблявшиеся ранее приемы логического вывода. “Сила исследователя, – говорил Давид Гильберт, – познается в решении проблем: он находит новые методы, новые точки зрения, он открывает более широкие и свободные горизонты” [43, с.401]. Современная математическая логика дала на поставленный выше вопрос вполне определенный ответ: никакая единая дедуктивная теория не может исчерпать разнообразия проблем теории чисел. Из этого можно сделать вывод, что понятие математической теории шире, чем понятие дедуктивной теории, развиваемой в духе стандартных приемов формальной логики. Говоря о становлении математического дедуктивного метода в специфической форме аксиоматизации геометрии, следует отметить неоднозначность истолкования античной идеи

бесконечного. Однако именно греки впервые использовали противоположность конечного и бесконечного как мощное орудие познания действительности.

Различие подходов в вопросе об обоснованиях математики ярко проявляется при рассмотрении проблем, связанных с идеей бесконечности. Для правильного научного подхода к понятию формальной математической теории нужна соответствующая философско-методологическая основа и необходим определенный опыт конкретизации содержания бесконечного в частных науках. Диалектически противоречивый характер математического понятия актуальной бесконечности требует применения новых подходов к проблеме обоснования математики. Напомним, что аксиома бесконечности – это последняя аксиома теории Цермело-Френкеля, без которой, имея в запасе лишь конечные множества, даже в их наивном понимании, не удастся построить ни одного бесконечного множества. Например, специалист по теории доказательств американский логик Георг Крайзель утверждает: “Очевидно, когда мы начинаем сознательно размышлять по поводу нашего знания (о чем бы то ни было), так называемые субъективные элементы выдвигаются на самый первый план – они представляются особенно близкими мыслящему субъекту” [90, с.270]. Самим математикам решиться на подобный философский анализ, опираясь только лишь на абстрактные математические соображения и выявляя их объективное содержание, непросто. Способность человека мыслить одновременно понятиями, образами и символами является источником устойчивой системной триады, в которой доминирует аналитическое начало (рацио), качественное начало (эмоцио) и субстанциальное начало (интуицио). Многие математики, физики и философы приняли новую парадигму о существовании пределов постижения мира, однако если эти границы истинные, то наука будет достаточно полной и в рамках этих границ.

Их “примеру смирения” последовали и другие науки, осознавая при этом, что хотя ограничения и пределы возможностей логики не влияют на ход событий в реальном мире, они могут определять то, что претендует на статус обоснованных интерпретаций этих событий. Вообще говоря, логичность как условие эффективности чаще всего проявляется лишь в узко специализированных сферах человеческой деятельности, например, физик-экспериментатор не обязан быть непротиворечивым, а должен эффективно описывать природу на определенных уровнях. Математики убеждены в том, любые принципиальные математические результаты, в том числе полученные Кантором, с необходимостью имеют отношение к свойствам физической реальности. Поиски решения проблемы обоснования математики на уровне философских обобщений нуждаются в философской рефлексии над эволюцией взглядов на сущность природы математики. С помощью принципа рефлексии, размышляя над смыслом системы аксиом и правил вывода, способных приводить к математическим истинам, не выводимым из заданных аксиом и правил вывода. В этом смысле принципы рефлексии противопоставляются рассуждениям формалистов. Среди различных интерпретаций рефлексии можно выделить “философскую”, на долю которой приходится общая проблема рефлексивной деятельности сознания как механизма систематизации.

Философская рефлексия своими системами категорий и принципов универсализирует разные способы деятельности сознания, их средства и результаты. Рефлексия, по Канту, есть осознание отношения данных представлений к различным источникам познания. Только благодаря философской рефлексии отношение их друг к другу может быть правильно определено.

Рефлексия, при всех различиях в ее трактовке, понимается как самосознание, которое устанавливает основания всего того, что составляет содержание сознания. Трактовка рефлексии зависит от того, какая область существования признается в качестве сущности для сознания. Философская рефлексия здесь предстает как универсальный способ не в смысле “общий у многих”, а как “общий для многих”. Принципы математического мышления связаны не только со свойствами нашего сознания, но и проявляют себя в законах внешнего мира. Поэтому не удивительно, что сфера надежности математики определяется через выявление онтологических оснований математического мышления и, соответственно, через привлечение гносеологических критериев. Но, как верно отмечает философ математики В.Я. Перминов, “онтологическая истинность математических суждений, при всей своей важности для математики, сама по себе недостаточна для понимания статуса аксиом” [138, с.231]. Сложная система аксиом современной теории формируется уже на основе очевидности, а как логическое основание исторически сложившихся программ обоснования математики. В частности, математическая рефлексия, как внутреннее применение математики к самой себе, может оказать более сильное эмоциональное воздействие, чем голословные заявления о пользе математических теорий и понятий. Так как при этом на уровне теоретического сознания происходит актуализация многих аксиом обыденного сознания, то нужна философская рефлексия над математикой, которая представляет собой познавательный аспект философско-математического постижения действительности.

В отличие от других областей знания арифметика и логика представляют собой универсальную онтологию, фиксирующую принципы предметности, независимые от каких-либо их региональных особенностей. Например, для обоснования действительного числа они определялись как пополнение пространства рациональных чисел пределами из фундаментальных последовательностей рациональных чисел или, другим способом, как дедекиндовы сечения на множестве рациональных чисел, которые в конечном итоге получаются из натуральных чисел. Это и есть, так называемая, “арифметизация анализа”. Органическая связь математики с онтологией вытекает из того мировоззренческого обстоятельства, что только онтологические представления могут дать систему стабильных и общезначимых смыслов, лежащих в основе предметного содержания суждений. Нельзя понять сущностной природы математики как науки, если не уяснить того, что математические структуры имеют онтологический, а не эмпирический характер, поэтому невозможно исключить математический платонизм из программ обоснования математики. При формировании естественного

пространства философии математики следует опираться на “онтологическое ядро” современной математики. Как бы не изменялась математическая реальность и какие бы новые математические образы не пришлось бы изобретать для ее описания, математические теории, составляющие ее основу, не могут исчезнуть или измениться, так как эта часть математики зависит лишь от категориального видения мира. В связи с развитием многозначных логик, нестандартного анализа и нечетких множеств, не говоря уже о переходе математики на вероятностный язык, философы математики, столкнувшись с “онтологической неточностью” стремились описывать ее точно.

Реальная проблема обоснования математики гораздо сложнее и тоньше, чем набивший оскомину вопрос о математической реальности. Для ее методологического анализа надо использовать не только общеполитические, но и общематематические категории, имеющие общетеоретический характер в концептуальных системах философии. Как отмечает философ физики В.П. Старжинский, “необходимо указать, что общенаучные категории находятся как бы между философией и частными науками, органически их соединяют, воплощают в себе некоторые философские принципы и частнонаучную их реализацию” [155, с.33]. Эта специфика общенаучных категорий служит основой проникновения философии в математическое познание. Источником общенаучных понятий являются, например, общетеоретические проблемы современной науки, рассматриваемые в новом направлении научного знания – синергетике. Кроме того, общенаучные понятия обладают одним существенным признаком, отличающим их от философских категорий, а именно речь идет о том, что они допускают уточнение специфическими средствами математических теорий. Поэтому, хотя математические доказательства являются основными объектами изучения математического рассуждения, для понимания указанных проблем нельзя отказываться от анализа смысла теорем, так как их различия можно интерпретировать в терминах различных свойств и структур. Заложенные в математику априорные концепции должны быть эффективным и надежным путеводителем в обосновании математики, а не становиться ограничением и барьером между ними. В начале XXI века, наконец, было осознано, что поскольку полнота недостижима, то от современной математики, при условии сохранения ее достаточной строгости и точности, требуется лишь сохранять целостность математического знания, опираясь на онтологическую истинность его исходных положений.

Десятилетние дискуссии между “классиками” и “конструктивистами” во многом сгладили конфронтацию и определенную методологическую напряженность между сторонниками формалистского и интуитивистского направлений в обосновании математики. В действительности линия раздела проходит не между формалистскими и интуитивистскими принципами, а поперек этой традиционной границы в подходах к обоснованию.

Гармонизацией некогда резкого диссонанса в их отношениях послужило то, что формальная теоретико-множественная математика не была бы в принципе возможна, если бы ее грандиозный замысел не был бы доступен математической интуиции. Математические умозаключения основываются не только на формальной дедукции, но и на свидетельствах ясного и интуитивно понятного процесса, подобно процессу порождения натуральных чисел, с помощью которых происходит арифметизация анализа.

Удивительная эффективность и красота идеальных понятий способствовала распространению в среде математиков популярной точки зрения Платона, согласно которой, идеальные понятия первичны, а так называемые “реальные” служат лишь их несовершенными отражениями. Декарт не доверял этому вмешательству воображения и пытался полностью исключить его из науки. Эта программа Декарта до сих пор применяется современными математиками. Любая интерпретация развития математики может в итоге оказаться односторонней и неполной. Если речь не идет о принципиальных методологических вопросах, следует наряду со своим взглядом признавать и альтернативный ему взгляд. Истинная сущность дополнительных математических категорий раскрывается в рамках неклассической рациональности, когда альтернативные признаки сосуществуют одновременно.

Полезно сравнить претензии оснований, относящиеся к “формализму или конструктивизму в принципе”, с конкретным опытом современной математики, чтобы убедиться в том, до какой степени соответствующие идеализации имеют отношение к делу. Но поскольку математическая истина не должна подчиняться никакому “общественно-зависимому” критерию, то в таком контексте можно отдать предпочтение платонистской точке зрения, согласно которой математическая истина абсолютна вечна. Теория познания пока еще не достигла пока полной ясности в проблеме обоснования современной математики, так как она не имеет убедительного для всех течений философии математики объяснения и “уразумения” сущностной природы математики. Это связано, прежде всего, с тем, что, вообще говоря, анализ и методологическое упрочение оснований динамично развивающихся разделов современной математики не имеет пределов.

История развития математики подтверждает, что никакая ограниченная “идейная база”, никакой фиксированный метод не дают возможности решать все проблемы математики, даже при достаточности и неизменности ее аксиом. Не существует общего метода, который определял бы по аксиоматическому описанию любой теории, противоречива она или нет. Идеальные понятия математики – это эффективные орудия человеческой мысли, способствующие решению новых проблем, требующих новых фундаментальных идей. В этом смысле классическая математика – неисчерпаемый источник идей, которые можно классифицировать по паре дополнительных способов описания “платонизм – антиплатонизм”. С точки зрения дополнительных категорий в эпистемологии можно утверждать, что рациональные и иррациональные

подходы, а также классические и неклассические стратегии познания характеризуют целостное математическое мышление.

Поиски окончательного ответа на вопросы обоснования не должны выливаться в имитацию математического исследования, когда философия математики пытается следовать в собственных стандартах строгости за самой математикой. Хотя чистая математика все еще остается наиболее методологически обоснованным научным знанием, ее притязания на уникальный статус становятся все менее философски обоснованными. Надежда на решение методологической задачи по достижению полной определенности путем формирования прочных оснований математики была поколеблена сначала гёделевскими результатами, а затем и возможным появлением в обозримом будущем математических рассуждений такой сложности, о которой никто из математиков помыслить не может. Для того, чтобы собрать единую картину, нужно объединение различных подходов.

Соответствующие кризисы в философии математики носят эпистемологический характер и не связаны с онтологией математики. Поэтому для углубления философии математики, в контексте эволюции взглядов на сущность природы математики на пути рационального обоснования математического знания необходим синтез различных потоков философско-математической мысли. Для выхода в новое смысловое пространство необходим синтез различных точек зрения, в том числе и ставших достоянием истории философии математики, поскольку все они контекстуально написаны на языке математики. Именно внутренняя логика историко-философского процесса как логика последовательно возникающих программ обоснования математики стимулирует выделение проблемного поля философии математики.

ГЛАВА 3.

ФИЛОСОФСКАЯ КОМПАРАТИВИСТИКА И ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТЬ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПОЗНАНИИ

Математическая наука не знает предложений, истинность которых может подлежать дискуссии, поскольку пока утверждение не доказано, оно вообще говоря не входит в математическое знание. Но в вопросах логического и философского обоснования современной математики дискуссии возможны и даже, в определенном смысле, неизбежны. В каждой философско-методологической системе обоснования есть своя доля истины и их синтез возможен и необходим, если необходимо взаимопонимание различных направлений философии математики. Становление философской идеи неизбежно проходит стадию сравнительных исследований. В этот период понятие “сравнение”, в контексте нашего исследования, приобретает значение понимания, осмысления и усвоения ценностей различных программ обоснования математики. Заметим, что в философской литературе понятия “сравнительная философия” и “философская компаративистика” в широком смысле слова, рассматриваются как синонимы. Широко понимаемая сравнительная философия существовала всегда, так как любой исследователь философских проблем рассматривает несколько альтернативных точек зрения и пытается сравнить их для поиска лучшего решения проблемы.

Понятие “философская компаративистика” в большей мере отражает именно методологический аспект, то есть компаративистский подход как сравнительно-исторический метод в философии, присутствующий во всяком историко-философском исследовании. Компаративистский подход к исследованию проблемы обоснования – это неизбежный этап познания, следующий за реконструкцией истории философско-методологических программ математики. Как отмечает специалист по историко-философским исследованиям А.С. Колесников: “Философская компаративистика обращает внимание на то, что всегда существовало, но приобретает принципиальное значение именно в современной ситуации множественности философских дискурсов” [83, с.143]. С точки зрения компаративистики философия математики, сравнивая и сопоставляя философские традиции в подходе к обоснованию, стремится выявить скрытые идеи, входящие в различные комбинации хорошо известных философско-методологических программ обоснования. Цель философского сравнения связана с созданием новой идеи. В философской компаративистике такой идеей является утверждение синтеза философских программ обоснования математики.

Представления о целостности математики не мешают появлению различных “диалектов” математического языка, а также математических теорий, невыразимых на нем. Для адекватного понимания проблемы обоснования современной математики необходимо компетентное участие не только математиков, но и философов. Компаративистская методология в философии математики, расширяет границы методологического поиска, поскольку лежит в основе любой попытки создания концептуального синтеза

философских программ обоснования, который является методологической основой новой философской традиции XXI века. При изучении новых математических структур физика играет роль своеобразного индикатора, ограждая математиков от движения в схоластическом направлении бессодержательной абстракции. Помимо сложностей концептуального характера, физические трудности связаны с тем, что практически невозможно проверить математические предсказания физической теории экспериментально. По существу философы науки встретились с непривычной для них ситуацией, а точнее с первым примером физической теории, где ее достоверность должна оцениваться методологически так же как математическая теорема. Но гипотезы, сформулированные в физической теории струн, привели и к новым математическим результатам.

Например, “идеи дуальности”, отражающие соотношение между поведением частиц на малых и больших расстояниях, привели в итоге к крупным математическим результатам в алгебраической топологии. С точки зрения компаративистики не только математика и физика сравнивают и дополняют друг друга, но и внутри математики такие подчеркнуто различные компоненты познания как “посредством интуиции” и “понятие посредством постулирования” вносят целостный вклад в понимание природы математического сознания. Заметим, что согласно современным философским воззрениям квантовая реальность и принцип дополнительности представляются более приспособленными для описания сознания, чем известные классические представления. Разные философско-математические реальности сродни дополнительности познания. Осознание незнания того, как именно мы познаем, – это процесс, приведший к формулированию неклассических принципов, среди которых необходимо выделить философский принцип дополнительности. Компаративистская методология показывает как философские программы взаимодополняют друг друга на пути к целостности. Но прежде чем делать акцент на идеях целостности необходимо проанализировать понятие дополнительности необходимое для описания системной триады программ обоснования математики.

Сравнительная философия стремится к разрешению трех фундаментальных проблем: проблемы знания, проблемы реальности и проблемы ценностей. Поэтому она выявляет широко распространенные идеи и идеалы, порождающие проблему стандартов для сравнений. Если излагать взгляд Бора на сущность концепции дополнительности не в исторической, а логической последовательности, то необходимо выделить, наряду с классическим гносеологическим требованием разделения процесса наблюдения на наблюдаемый объект и средства наблюдения, онтологический постулат о целостности процесса наблюдения. Вот это уже типично неклассическое предположение, ограничивающее пределы применимости классических понятий. Аналогичные процессы можно проследить и в работах математиков и логиков по проблемам обоснования математики. Главная проблема философии математики состоит в том, как приспособить все ее направления к

всестороннему целостному обоснованию математики, поскольку все ее важнейшие части порождены реальными потребностями математики.

3.1. Философско-математический анализ концепции дополнительности

В современной математике можно выделить два круга результатов и проблем: одни из них касаются того, что она представляет сама по себе, а другие касаются результатов о возможностях нашей деятельности. В классической математике вопросы “второго плана” – о вычислениях и построениях – играли в ней подчиненную роль, но теперь их значение существенно изменилось. Что же способствовало принципиальному изменению математики? Тривиальный ответ – возрастание практической необходимости вычислений и применение электронно-вычислительных машин. Но глубинная суть столь радикального изменения не в этом. “Дело в теоретической постановке вопросов о возможностях осуществить не только то или иное вычисление, – отмечает академик А.Д. Александров, – но и получить тот или иной теоретический результат” [2, с.324]. Благодаря новым теориям математики, например, теории алгоритмов, игр, информации и других, в сферу математики включаются и исследования человеческой деятельности. С этой точки зрения, математика, возникшая в качестве эмпирической естественной науки, становится отчасти наукой гуманитарной.

Одним из достоинств точной науки является то, что ее понятия превращены в термины и поэтому не может возникнуть никаких двусмысленностей при их истолковании. К недостаткам точной науки можно отнести то, что неявные предположения, иногда довольно критичные для рассматриваемой теории, прячутся в применяемый общий математический аппарат и их не осознают даже специалисты. В любом общем понятии, даже безотносительно к его предметному содержанию, имеется апория, которую можно сформулировать как “невозможность возможного”. Ученый-гуманитарий Михаил Эпштейн разъясняет смысл возможного–невозможного следующим образом: “Апория возникает лишь в том случае, если то, что возможно, является невозможным именно в силу своего модального статуса возможного. Такая апория содержится во всем мыслимом, – и только само мышление является способом ее разрешения” [176, с.109]. Именно мышлению присуще свойство соединять возможное с невозможным. Подобно тому, как зеноновская апория “Ахиллес и черепаха” решается при допущении непрерывности движения, подобная ей апория “мыслимое не станет действительным” решается при допущении непрерывности мышления, соединяющего потенциально мыслимое с актуально мыслящим. В V веке до нашей эры Зенон из Элеи, который был учеником Парменида, пришел к выводу, что Ахиллес никогда не обгонит черепаху, если у нее будет преимущество на старте. К тому времени, когда Ахиллес достигнет той точки, где она была до начала движения, она немного продвинется вперед и все повторится с начала. Таким образом, эта процедура “обгона” обречена на

выполнение бесконечного числа этапов, которые Ахиллес, как конечное существо, выполнить не может, а то, что он сможет реально сделать, невозможно обнаружить с помощью одной “чистой” логики. То, что он может сделать в соответствии с законами физики, накладывает некоторые физические ограничения на процесс доказательства.

Из наблюдения за процессами в природе, где нет возможности как таковой, которая включала бы в себя невозможность, сложилась концепция Аристотеля, согласно которой актуальное предшествует потенциальному. Для дальнейших рассуждений принципиально важны следующие слова из “Метафизики” Аристотеля: “В возможности одно и то же может быть вместе противоположными вещами, но в реальном осуществлении – нет” [6, с.92]. На этой антиномии можно проследить преемственность между идеями античной философии и методологическими основаниями квантовой физики. Важнейший аргумент состоит в том, что дополнительные стороны явления описываются в квантовой теории вероятностными распределениями, задаваемыми с помощью волновой функции, представляющими поэтому не актуальное знание, а лишь возможное знание. Можно привести и более ранние аналогии между основами дополненности и проблемой соотношения единства и множественности в терминах понятий единого и многого, поставленной древнегреческими мыслителями. Так, например, платоновский Парменид доказывает, что “единое не существует как единое”, даже вообще не существует, хотя должно существовать “бытие единого, не тождественное с единым” в том смысле, что бытие единого представляет собой многое и это бытие поделено между множеством существующего. Если квантовомеханический объект интерпретировать в стиле “Парменида”, то окажется, что мыслимый как единое, он абсолютно нефизичен, поскольку его невозможно наблюдать.

В работе “О понятиях причинности и дополненности” (1948) один из создателей современной физики, выдающийся датский мыслитель Нильс Бор писал: “Тот факт, что квантовые явления не могут быть проанализированы на классической основе, означает невозможность отделить поведение атомных объектов от взаимодействия этих объектов с измерительными приборами, необходимыми для определения условий, в которых протекают рассматриваемые явления” [23, с.393]. Так система “объект + прибор” представляет собой новое единое, как единство кванта действия, которое одновременно мыслится и как многое, поскольку, будучи физическим и наблюдаемым, оно также обладает и бытием с его “неизбежной множественностью”, которая “причастна единому”. Эмпирические указания, иллюстрирующие известную дилемму о корпускулярных и волновых свойствах материальных частиц и электромагнитного излучения, свидетельствовали о “наличии соотношений нового типа”, не имеющих аналога в классической физике. Нильс Бор счел удобным обозначить их термином “дополненность”, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что в противоречащих друг другу явлениях мы имеем дело с различными, но одинаково существенными аспектами единого комплекса сведений об объектах. Заметим, что это противоречие между физическим процессом и наблюдением аналогично

противоречию между формализмом и сознательным мышлением в гильбертовой программе обоснования математики. Вообще говоря, не существует иерархии надежности от математических аргументов к естественнонаучным и философским. Даже чисто математические доказательства компьютерной математики становятся надежными благодаря физическим и философским теориям, поддерживающим их.

Дополнительность предполагает, что структуры природы представляют собой сложную иерархию двухполюсных систем, подразделяющихся на “дискретное – связное”, “случайное – необходимое”, “конечное – бесконечное” и другие системы. Философ науки и физик Г.В. Гивишвили утверждает, что “принцип дополнительности, в свою очередь, сам является дополнением к принципу разделения всего сущего по признаку противоположных свойств на полярные, но комплементарные внутри себя и между собой пары” [41, с.80]. Такой подход отличается от дуализма Нового времени, возникшего в связи с вопросом о соотношении души и тела или, в более широкой постановке, соотношении идеального и материального. В Новое время философия ориентировалась на научную форму рациональности, и уже в этот период появляются признаки несовпадения ценностей знания и духовного саморазвития личности. Познание возможно лишь потому, что в мире уже существуют формы и духовное содержание, а творческим оно становится тогда, когда от простого восприятия переходит к духовному открытию нового содержания и новой формы. Различие между образом и понятием возникло с тех пор, как Платон разъединил философию и искусство. С тех пор философия “колеблется” в своих формах выражения между математикой и литературой. Однако разделение науки и искусства было неестественным и вредным для обеих сторон, поскольку между ними, вообще говоря, нет непреодолимой противоположности. Например, основатель современной феноменологии, серьезно интересовавшийся философией математики, Эдмунд Гуссерль кризис новоевропейской истории связывает с утратой научным разумом единой метафизической перспективы. То, что Кант называл метафизикой, Гуссерль называл мудростью и глубокомыслием. Оба мыслителя были убеждены в том, что настоящее знание должно быть априорным. Гуссерль даже предлагал свою теорию, которая, по его мнению, должна была оправдать наше безграничное доверие к разуму. Так же, как в свое время математические истины подвигли Платона на создание философского мышления, так и многие философы науки обратились к математической логике с целью избавиться от критических нападков.

Наиболее заметными фигурами в попытке возродить математический дух были немецкий философ Эдмунд Гуссерль и британский философ Бертран Рассел. Рассел провозгласил логику сущностью философии, присоединившись к Гуссерлю в осуждении психологизма, проникающего в философию математики, а немецкий математик Герман Вейль, с немалым на то основанием, считал логику гигиеной, позволяющей математикам сохранять свои идеи здоровыми и сильными. Первичный смысл, который мы вкладываем в слово “логика”, состоит в анализе и критике мышления. Изучение норм и принципов

правильного рассуждения всегда считалось одной из задач философии. Чтобы отличать этот круг проблем от других смыслов слова “логика”, специалист по математической логике Хаскелл Карри предлагает использовать термин “философская логика” [75, с.17]. К ее компетенции можно отнести два взаимодополняющих друг друга комплекса проблем: философские проблемы обоснования логических систем и проблемы логического анализа важнейших философских вопросов. При изучении философской логики можно воспользоваться математическими методами, то есть строить специальные математические системы, определенным образом связанные с логикой. Логика, рассматриваемая в этом смысле, является частью математики и ее принято называть “математической логикой”. Как математическая дисциплина, она занимает особое положение по отношению к остальной математике. Основная проблема математической логики состоит в объяснении природы математической строгости. Наконец, третье значение слова “логика” состоит в том, что им можно называть любую из конкретных теорий, являющихся предметом изучения математической или философской логики, например, аристотелевская логика, модальная логика, квантовая логика и так далее.

Поскольку мышление – это психический процесс, то логика изучает законы и формы этого нормального процесса психической деятельности людей. Например, при построении определения числа Готлоб Фреге использовал предложения естественного и искусственного языка, а это поставило перед ним логическую проблему: что такое значение языковых выражений? В проблеме психологизма в логике, с точки зрения концепции дополнительности, следует различать два круга вопросов. “Одно дело – рассмотрение логических форм и законов как форм и законов некоторого естественного, природного процесса психической деятельности людей, – считает философ Е.Д. Смирнова, – другое – вопрос включения познающего субъекта, его установок, предпосылок, наконец, принимаемого им концептуального аппарата в обоснование логических форм и законов” [153, с.222]. Это совершенно различные установки. Математическое мышление дуалистично, так как объект и субъект рассматриваются в нем как внешние категории по отношению друг к другу. Поэтому выявление роли субъекта в познавательной математической деятельности занимает особое место в обосновании принимаемых приемов рассуждения. В современном естествознании используются два взаимодополнительных способа описания физических явлений природы: классический и квантовый. Средством разрешения эпистемологических проблем, возникающих в связи с разграничением субъекта и объекта, Нильс Бор считал дополнительный способ описания, примененный им в квантовой физике. В фундаментальной работе философа физики И.С. Алексеева “Концепция дополнительности”, посвященной историческому и методологическому анализу концепции дополнительности, отмечается, что “квантовая физика обнаруживает тесную связь с онтологическими проблемами, обсуждавшимися Декартом, и с эпистемологическими проблемами, обсуждавшимися Кантом” [3, с.101]. Во всей истории науки великие

математики, опираясь на свою интуицию, расходились во мнениях относительно обоснованности различных методов доказательства.

Математики не всегда способны отличать интуицию физико-математической реальности от ошибочной интуиции или ошибочных идей. Рене Декарт подвергает сомнению все, что не является ясным и отчетливым. Главное здесь то, что существует именно мысль, независимая от материальной субстанции. Даже для изучения физического мира Декарт хотел использовать только математику. Понимание философии природы основано на соединении двух дополняющих друг друга принципов. Иммануил Кант считал, что философское познание дискурсивно, а математическое интуитивно. В концепции Бора можно усмотреть рациональные моменты философии Канта и других мыслителей прошлого. Одно из проявлений сознания – чувственность, а другое – рассудок. В этом состоит двоичность сознания, то есть в чувственном созерцании и мышлении. Именно философское и математическое познание вместе взятые занимают, по Канту, две области всего априорного познания. Он создал предпосылки для соприкосновения между философией чистого духа и научным методом. Однако кантовское понимание взаимодействия разума и внешнего мира, включающее метафизику естествознания, содержит различные противоречия, которые ограничивают влияние кантовских интуиций на развитие науки. Заметим, в связи с этим, что его “трансцендентальное учение о методе” ограничивает сферу математических объектов сферой объектов, интуитивно ясных, конструируемых в созерцании, хотя математика не должна отказываться ни от одной непротиворечивой структуры, используемой для решения определенных задач, вне зависимости от ее очевидности. В философской системе Канта чистая интуиция играет важнейшую роль. Он считал, что математика основана на чистой интуиции, а не на разуме. Однако математическая интуиция не дается нам изначально.

Вообще говоря, рассуждать об интуиции абстрактных математических объектов довольно трудно, в том смысле, что каждый математик создает свой индивидуальный мысленный образ, в каких-то аспектах даже несравнимый с соответствующими мыслеобразами других людей. Многие положения интуиционизма были предвосхищены Иммануилом Кантом. Хотя со временем пришло понимание того, что ощущения или восприятия, являясь отражением внешнего мира, не дают нам абсолютного знания, поскольку содержат элементы взаимодействия между воспринимаемым объектом или процессом и тем, кто его воспринимает. Разум анализирует восприятия и применяет свое понимание пространства и времени к опытным данным. Не опыт, по Канту, является источником знания, хотя оно и может начинаться с опыта. Знание, считал он, берется из разума, а человек, побуждаемый научным духом, желает знать, прежде всего, для того, чтобы ставить осмысленные и точные вопросы. Одним из способов решения проблем, поставленных Кантом, но в контексте, отличном от кантовского, является концепция дополнительности, хотя предпосылки дополнительного способа описания можно усмотреть и в кантовской дихотомии априорных форм чувственности и рассудка. Реальные соотношения различных компонентов научного знания не всегда адекватно

отражаются в методологии и философии науки, потому, что сами элементы научного знания лишь после анализа всех своих следствий предстают с течением времени в завершенном виде. Духовное содержание современного научного знания стремиться преодолеть “философию сознания”, основанную на субъектно-объектных отношениях и противопоставлении материи и духа. Одна из важнейших проблем интерпретации в науке – это проблема соотношения субъекта и объекта. В соответствии с взглядами Нильса Бора, вся система понятий классической физики основана на предпосылке, что можно отделить поведение материальных объектов от вопроса об их наблюдении. Такую же философскую проблему пробовали решить многие мыслители прошлого, пытаясь согласовать наше двойственное положение как зрителей, так и действующих лиц в великой драме нашего земного существования.

Естественные науки привязывают мышление к фактам действительности, а философия возвращает мышление в сферу мышления как такового. Мысль нуждается в радикальной смене аксиом, а бытие исторично и экзистенциально, “аксиоматически” заданное условиями рождения, генами, характером, последовательно разворачивает свои “начальные условия” в доказательстве своей полной осмысленности и необходимости. Этот дуализм мышления и бытия по-разному решался великими мыслителями прошлого. Декарт верил в априорные истины и силу разума, который может выработать полное знание обо всем. В “Принципах философии” (1644) он называет математику сущностью всех наук. Рене Декарт был убежден в том, что наша интуиция и метод дедукции должны приводить к верным заключениям, поскольку Бог, как “бесконечная, вечная, неизменная и всемогущая субстанция”, не стал бы вводить нас в заблуждение. По Декарту, естественный свет разума, прорезающий тьму незнания на пути к абсолютным истинам, зажигает в душе человека Бог. Путь разума Рене Декарт представлял как методическое познание, сформулированное им в “Правилах для руководства ума”, от “врожденных идей” к сложнейшим построениям человеческого ума. По Ньютону, этот путь осмысленный эксперимент проходит в рамках математической теории. Декарт не осуществил свой принцип математического обоснования всех философских истин, однако его научный метод в области физической субстанции был реализован в открытиях Ньютона, разработавшего основы математического анализа – математического исчисления, способного соединить априорное и эмпирическое знание его времени. В своем основном научном труде “Математические начала натуральной философии” (1687), создававшемся на протяжении двадцати лет и насквозь проникнутом духом новых исчислений, Исаак Ньютон пытался вернуть природе “отнятую у нее картезианцами” активность и самостоятельность. “Начала” Ньютона, поражавшие дерзостью, с какой человек вторгся в компетенцию Творца, довольно убедительно разъясняли основанность природы на математических принципах, поскольку построенная в работе грандиозная теория объясняла и падение камня, и океанские приливы, и движения планет, и даже блуждания комет.

Ньютон по существу обосновал взгляды Декарта на упорядоченность природы, подчиняющейся постижимым наукой математическим законам. Однако парадоксальным образом новая наука, суть которой, согласно принципу радикального сомнения Декарта, состояла в критике собственных утверждений и выдвижении новых гипотез, сведя активность разума к раскрытию “божественного замысла”, лишалась этой сути и погружалась в догматизм. Для понимания изменений методологии современной науки для нас особенно важна философская концепция французского математика и философа Блеза Паскаля. Он испытывал на себе влияние стремительно развивающегося современного естествознания и религиозного мироощущения реформаторов и янсенистов. Эта ситуация характерна для всего последующего периода дуализма отношений между точными науками и религией сверхъестественного, поскольку и то и другое, по мнению богослова и мыслителя Ханса фон Бальтазара, “требует, как представляется, отказа от философии во имя методологической чистоты” [11, с.31]. В философии Блеза Паскаля можно обнаружить картезианские темы, который, как и Рене Декарт, восхищался строгостью математического знания. Блез Паскаль, которого необоснованно обвиняют в декартовском дуализме материи и духа, не разделял убеждения Декарта в неограниченной монополии разума в сфере теоретического знания и ввел в нее дополнительный, по отношению к разуму, принцип – “чувственную интуицию сердца”. Анализируя работу геометров, Паскаль описывал два дополнительных способа мышления – один, проистекающий из осознания ясных принципов, и другой, заключающийся в постижении всех взаимосвязей как равноправных, вне оценочного сопоставления. Однако в тех случаях, когда мыслящий оказывался способен прозревать причины, он помещал на более высокую ступень силу интуиции.

Блез Паскаль расширил декартову сферу “естественного света” человеческого разума за счет интуиций внешних и внутренних чувств. Бесконечность познания никогда не совпадет с действительностью, оставляя нам открытыми вопросы о “первопричинах”, поскольку мир бесконечен не только вширь, но и вглубь, то есть самом малом, поэтому он неисчерпаем для конечного человека. Блез Паскаль начинал с усвоения философии Рене Декарта и глубокого уважения к нему как признанному мэтру французской науки и философии. Общее методологическое положение в философской мысли Декарта и Паскаля состоит в признании математики и аксиоматическо-дедуктивного метода в качестве образца научной строгости и доказательности при исследовании научной истины. Вслед за Рене Декартом математик Блез Паскаль творчески развивает геометрический метод и считает его наиболее совершенным методом познания. Несмотря на противопоставление двух великих мыслителей, даже сторонники этого направления вынуждены признать, что из “картезианской философии” Паскаль усвоил великий принцип мысли как доказательство человеческого существования. Паскаль, также как и Декарт, связывает признак совершенства знания с его ясностью, простотой и самоочевидностью для “естественного света” разума, но в отличие от Декарта, и чувств. Наглядность и понятность образа предполагает двойную

бесконечность: бесконечно малое и бесконечно большое, каждое из которых само по себе непознаваемо и непостижимо. Эти две бесконечности не суть лишь субъективные представления, какими они являются у Канта, а заданы у Паскаля самим феноменом как объективные предпосылки. Открытие того, что конечная фигура требует бесконечной среды, чтобы существовать и быть понятой, станет для Паскаля ключевым в его философии познания. Как бы ни была ограничена “человеческая природа”, ей присуще очень многое от бесконечного, считал Георг Кантор, без чего трудно объяснить убежденность и уверенность в “бытии абсолютного”.

Когда Паскаль соприкоснулся с наукой о человеке, то был поражен относительной скудостью и недостоверностью сведений, которыми она на то время располагала. В науке о человеке не было привычного строгого порядка, которым отличалась его любимая математика и которая со всей своей глубиной была бесполезна здесь, поскольку вопросы, относящиеся к изучению и объяснению человека, довольно трудно систематизировать с помощью абстрактно-аксиоматического метода. Признавая границы разума, Блез Паскаль не ограничивает нашу удивительную способность познания, поскольку даже частичное знание также является знанием, а неполная уверенность имеет свою ценность, когда известна степень этой уверенности. Методологические размышления Блеза Паскаля о математике возникли в результате его плодотворной работы в этой области. Это не абстрактные рассуждения рефлексирующего теоретика, что выгодно отличало Паскаля от других философов-ученых его эпохи. Заметим, что философская рефлексия – это, в частности, самосознание духовной деятельности с претензией на методологию всякого познания. Искусством убеждать называл Паскаль проведение “методичных и совершенных доказательств”, которое состоит в понимании и соблюдении условий или правил для определений, аксиом и доказательств [131, с.138-139]. Как и Декарт, Паскаль формулирует правила метода, но в отличие от него обращает внимание не на момент открытия истины, а на способ ее доказательства. Среди восьми его правил, по мнению Паскаля, пять из них являются абсолютно необходимыми.

Правила, необходимые для определений:

- 1) Не признавать неясные или двусмысленные термины.
- 2) В определениях использовать только известные или объясненные термины.

Правила, необходимые для аксиом:

- 3) Признавать аксиомами только сами по себе очевидные положения.

Правила, необходимые для доказательств: 4) Доказывать все, хотя бы немного неясные, положения, пользуясь аксиомами или ранее доказанными положениями. 5) Избегать двусмысленности терминов, ставя на место определяемого термина нужное определение.

Говоря о возражениях, которые могут быть сделаны по поводу этих правил, первым из них Паскаль назвал то, что, в сущности, в этом мире нет

ничего нового. Люди, обладающие “рассудительным умом” понимают, как могут различаться в зависимости от контекста похожие слова. Поэтому, чтобы практически овладеть методом Паскаля, несмотря на кажущуюся простоту его правил, все же необходимо изучить хотя бы основы евклидовой геометрии. Современная математика, в отличие от математики прошлого, следуя методам Декарта и Паскаля, тем не менее, не обладает более ни единством, которое стремились ей придать многие пророки математики, ни глобальной целью. Кроме того, современное математическое знание растет довольно быстро, не зная перестроек и революций, подобных процессам, происходящим в физике. По мнению академика И.Р. Шафаревича, достижения современной математики, как и творения классиков XVII-XIX веков, могут выдержать сравнение с достижениями эллинских гениев. В чем ценность неограниченного накопления математических теорий и идей? Говоря словами Шафаревича, возможна ли бесконечно продолжающаяся прекрасная симфония? “Я не думаю, – говорит он, – что математика радикально отличается от других форм культурной деятельности” [173, с.4]. Еще Платон утверждал, что в ней гораздо больше от познания чистого бытия. Может быть поэтому, в математике, в отличие от других областей знания, различимы некоторые универсальные закономерности. Математика, согласно философско-религиозным взглядам Павла Флоренского, лежит в основе мироздания.

Представления об основополагающем значении математики для “правильного” мировоззрения восходят к философско-математическим традициям древних греков, для которых в определенном смысле математика являлась по своей сущности философией. Осознание роли математики как руководящего принципа в натурфилософии также восходит к времени древних греков. Как отмечает специалист по философии математического образования В.А. Еровенко: “Греки отличаются от своих предшественников тем, что в их математических и философских исследованиях появилась вера в силу человеческого разума” [62, с.10]. Греческая мысль изначально оттачивалась на противопоставлении поведения физических объектов, как движения и изменения, и их существования с точки зрения их неизменности. Уже тогда эти понятия осмысливались как дополнительные. Заслуга Паскаля на пути решения этой проблемы в том, что он сознательно отказывался от однозначных решений, односторонних суждений, а также всяких преувеличений и абсолютизаций. Достоинство человеческого разума, согласно Паскалю, состоит в том, что он знает свою собственную ограниченность без гносеологических ценностей опыта, внешних чувств и “интуиций сердца”. В определениях, логике и доказательствах не только сила, но и слабость разума, поскольку есть первичные термины и аксиомы, например, в математике, которые не надо определять и доказывать или “медленно обсуждать”, а надобно некоторые вещи сразу видеть “одним взглядом”. Согласно библейскому преданию: “В начале было Слово”, сотворившее этот мир, несущее программу развития всего живого. Возможно, поэтому иногда говорят, что мысль материальна. В процессе формирования и закрепления знания язык оставляет свой специфический след на знании, но так как существует много языков различного

уровня, то возникает вопрос: как учесть соотношение инвариантного и варьируемого знания в нашем сознании. Пониманию этой проблемы может способствовать применение принципа дополнительности к некоторым фактам языковой действительности и логической природы рассуждений.

Здесь необходимо пояснить, в чем состоит отличие между узким и широким толкованием идеи дополнительности. В первом случае, два подмножества высказываний взаимоисключают друг друга, эквивалентны по своей значимости и являются факторами взаимоотношения наблюдателя и наблюдаемого. При широком понимании два подмножества высказываний по-прежнему необходимы для воспроизведения целостной картины исследуемого явления, но они не ограничены в полном объеме указанными выше специфическими характеристиками. Как отмечает армянский логик Г.А. Брутян, “настаивать на том, что при любом применении идея дополнительности сохраняет свои первоначальные характерные признаки, означало бы чрезвычайно сузить круг ее действия и тем самым в определенном смысле ограничить ее возможности приобретения методологических функций” [24, с.36]. Все это имеет прямое отношение к проблеме уточнения математического языка. Язык, применяемый математиками в своих рассуждениях, обладает некоторыми недостатками, которые не устраняются математической символикой, поскольку для ее связи используются предложения обыденного языка. В древних восточных учениях, например, в геометрии запрещались словесные формулировки, рассуждения, объяснения. Китайские ученые полагали, что именно слова являются причиной противоречий и софизмов. Сущность геометрических явлений, по их мнению, выражал рисунок или чертеж, одновременно показывая и доказывая их. Не случайно, задачу математизации наук Готфрид Лейбниц дополнил задачей логизации математики с конечной целью логизации всех наук. Человеческая деятельность по узнаванию и воспроизведению символов, претендующая на строгость математического доказательства, с точки зрения психологии мышления, не может быть идеально надежной. Если связывать современные математические рассуждения только с языковыми средствами, то тогда трудно понять, каким образом математики оценивают качество наиболее сложных доказательств, которые не могут не содержать ошибки.

Доказательство может иметь ошибки, но каждое доказательство освобождается от них в результате взаимодействия с другими доказательствами. Математика совершенствует себя не только через проверку доказательств, но и посредством системности своих теоретических построений. В математике в отличие от гуманитарных и естественных наук в конечном итоге достигается удовлетворяющая всех надежность и окончательность признанных доказательств. Все, кто когда-нибудь изучал математику хотя бы школьного уровня, по своему опыту знают, что математический язык – это только часть языка преподавания математики. “Язык изложения математики, – поясняет специалист по методике математике Г.В. Дорофеев, – пользуется терминами и предложениями, не входящими в собственно математический язык, зачастую не определяемыми и не уточняемыми в той степени, какой

требует язык математический” [56, с.38]. Например, такие фразы деятельного характера, как “упростить выражение”, “решить уравнение”, “доказать теорему”, “построить алгоритм”, “сформулировать гипотезу” недостаточно точны, чтобы считаться собственно математическими. Кроме того, чем дальше развивалась математика, и чем больше понятий входило в ее словарь, тем ближе к ее границам придвигались парадоксы, связанные с неоднозначностью и недоопределенностью предложений естественного языка. Рассмотрим один из наиболее ярких и элементарных примеров, известный под названием “парадокса Берри” (1906). Поскольку в русском языке 33 буквы, то предложений, состоящих не более чем из ста букв, не более чем 33^{100} , то есть конечное число, а так как натуральных чисел бесконечно много, то среди них должны быть такие, которые нельзя определить фразой, состоящей менее чем из ста букв. Тогда среди них есть и наименьшее число, которое можно определить так: “наименьшее натуральное число, которое нельзя определить предложением русского языка, содержащим менее ста букв”. Это определение содержит 96 букв, следовательно, оно противоречит самому себе.

Заметим, что подобная идея лежит в основе знаменитой теоремы Гёделя о неполноте любой достаточно сильной формальной теории, содержащей арифметику. Кроме того, некоторые математические задачи содержат неопределенности, носителями которых могут оказаться любые источники информации и знаний. “С точки зрения принятия решений весьма важна такая особенность многих расплывчатых категорий, как их “полярность”, “контрарность”, делающая возможным их проблемно-ориентационную интерпретацию” [18, с.103]. Проблема доопределения гносеологических неопределенностей гораздо сложнее, чем задачи, решаемые методами теории вероятностей, поскольку категория случайного – это часть более общей категории неопределенного. В духе сказанного становится понятным, почему невозможно математически строго реализовать такой общеупотребимый и деятельностный термин как “обосновать логически”. Тем не менее, Готлоб Фреге считал, что логическими основаниями нужно интересоваться в большей степени, чем это принято у большинства математиков. Он придерживался следующих правил: строго отделять логическое от психологического; спрашивать о значении слова не в его обособленности, а в контексте предложения; не терять из виду различие между понятием и предметом. Если определения новых математических терминов и символов не наталкиваются на противоречия и позволяют познать связи между понятиями, кажущимися далекими друг от друга, способствуя тем самым более высокой упорядоченности теории, то их принимают как достаточные даже без логического оправдания.

По существу мышление всюду одинаковое. Как отмечает Готлоб Фреге в работе “Основания арифметики” (1884): “Различия заключаются только в большей или меньшей чистоте и независимости от психологических влияний и от внешней помощи мышлению такой, как язык, знаки чисел и т.п., затем, кое-что еще зависит от тонкостей в строении понятия, но как раз во внимании к этому математику не могут превзойти ни наука, ни сама философия” [166, с.18].

Употреблять в математической практике числовые знаки и формульные выражения можно только после того, считал он, как посредством “действительного мышления” математический знаковый язык разовьется так, что он, как иногда говорят, “мыслит за нас”. Признание зависимости мышления от языка поставило философию перед дилеммой: с одной стороны, логика должна быть наукой об инвариантных структурах мышления, а с другой стороны, эти структуры выражаются в языке и с помощью языка, а язык определяется историческими, культурными и психологическими особенностями народов. Почему, исходя из предложений естественного языка, можно получить что-то такое, чему эта структура не соответствует? Для Фреге как для математика, различающего грамматические и логические структуры, здесь нет проблемы. Он считал, что предложения математики не определяются структурой и употреблением естественного языка, а даны сознанию непосредственно. Поэтому, например, для понятия числа предложения естественного языка служат лишь исходным пунктом анализа. Если бы программа Фреге оказалась реализуемой и можно было бы найти метод для определения, является ли любое высказывание формальной логики истинным или ложным, то тогда можно было бы определять истинность любого математического утверждения, независимо от их сложности. Заметим в связи с этим, что программа логицизма равнозначна утверждению, что вся арифметика состоит из аналитических суждений. Готлоб Фреге не смог реализовать эту программу.

Возможно, что крушение логицизма было обусловлено дефектами естественного языка. Современная логика – это лишь начало наук нового поколения, призванных сочетать аналитичность научного метода с синтетическим восприятием гуманитарного взгляда. Цивилизация обречена, если ее “внешние слои” несут в себе, по крайней мере, две практически не взаимодействующие культуры. Современные научные методы изучения естественных языков характеризуются тем, что вырабатываются их точные математические модели, которые, тем не менее, опять строятся при помощи тех же обычных естественных языков. Полная формализация естественных языков представляется априори невозможной по различным причинам. Например, по мнению известного французского математика Рене Тома, “само понятие “правильной составленности” в естественном языке не является ни жестко определенным, ни четко ограниченным” [158, с.202]. Даже любое жесткое разграничение синтаксических и семантических неправильностей может быть только условным, считает он. Заметим, что с точки зрения современной математики противопоставление “дискретное – непрерывное”, рассматриваемое в философии со времен древних греков, не совсем удачно, поскольку по существу непрерывным в этом бинарном отношении в философии называют то, что на деле является гладким или дифференцируемым. Так уж сложилось, что иллюстративные примеры непрерывности, как правило, являются примерами гладкости, хотя непрерывное отображение может оказаться негладким. Кроме того, дискретное – это свойство множества, а непрерывное – это свойство отображения, поэтому “дискретному” правильнее противопоставлять “связное”.

Внутриматематическое развитие приводит к терминологическим изменениям языка науки. Математика рассматривалась Нильсом Бором как своеобразное расширение “обычного языка”, который он отождествлял с языком понятий классической физики. Хотя сам Бор не был приверженцем математического направления в физике, а был силен в эпистемологическом анализе и физических интерпретациях, особую ценность математического описания квантово-механической специфики он видел в том, что она дает надлежащие средства для устранения субъективного элемента и для расширения объективного описания.

Дуализм “волна – частица” в квантовой механике адекватно выражается на языке двойственности бесконечномерных линейных пространств, точнее, соединения линейной и групповой двойственности в технике анализа преобразования Фурье. Попытки распространить дополненность за пределы физики существуют уже очень давно и пока ни к чему существенному не привели. Если даже в каком-то явлении имеет место дополненность, то дальше этой констатации дело не идет, что не способствует более глубокому пониманию и развитию самого понятия дополненности. В любых конкретных социальных условиях можно обнаружить комбинации современного и традиционного знания. Именно в духе греческого идеала поиска истины, свободного от каких-либо практических интересов, благодаря упорству математиков, вдохновленных этим заветом, как полагает французский математик Жан Дьедонне, мы обязаны рождению теории групп и современной алгебраической геометрии. Фундаментальная физика и математика эпохи Просвещения рассматривались как основательные аргументы, в духе требований разума, для определения современной точки зрения в отличие от предшествовавших. Некоторые физические формулировки, даже не являясь верными и вполне осмысленными со строго математической точки зрения, породили многочисленные далеко идущие обобщения, выдерживающие проверку средствами математики и физики, как например, исследуемый в гармоническом анализе всеобщий “корпускулярно-волновой дуализм”. В результате небывалого расцвета физики в первой половине XX века произошло разделение теоретической физики, часть которой, называемая математической физикой, по духу тесно связана с математическими проблемами квантовой теории. “Я считаю задачей математической физики, – утверждает один из ведущих специалистов в этой области академик Л.Д. Фаддеев, – использование математической интуиции для вывода действительно новых результатов в фундаментальной физике” [163, с.8]. Для философии познания важно осознание того, что по отношению к математике дополненность интуитивного познания может работать в обе стороны, – как для понимания какого-то математического явления, так и для понимания себя самой.

Без противоположностей ничто не обнаруживается. Нильс Бор говорил, что “противоположности – не противоречия, они – дополнения”. Возможно, именно поэтому антиномии и парадоксы рассматривались религиозными мыслителями как критерии истинности веры. Для понимания веры математиков в надежность их доказательств необходимо ответить на следующие вопросы:

обладают ли они способностью “не впадать в ошибки” при анализе математических утверждений и могут ли они достичь такой “завершенности доказательства”, которая не подвержена какому-либо пересмотру в будущем? Диалектика математического мышления состоит в дополнительности и совместимости отрицательного ответа на первый вопрос и положительного ответа на второй. Математическое исследование и речевая деятельность – это системы с рефлексией, то есть системы, которые, с одной стороны, реализуют определенные функции, а с другой – сами же способствуют своему содержательному функционированию. Можно даже предположить дополнительность реальной деятельности и ее рефлексивных отображений. Например, дополнительность двух описаний математической деятельности: либо фиксирующей программы обоснования, в рамках которых она осуществляется, либо ее содержание и практическую целесообразность. Напомним, что если в классической механике известно начальное состояние системы (координаты и их первые производные – скорости), то, согласно дифференциальным уравнениям Лагранжа второго порядка, можно рассчитать дальнейшую траекторию системы. Поскольку в квантовой теории нельзя одновременно измерить координаты и скорость, то понятие траектории теряет смысл и, с точки зрения классических понятий, частицы движутся как бы скачками. “Если в “классике” физическая интерпретация, как правило, предшествовала математической формулировке теории, – утверждает историк физики Вл. П. Визгин, – то в неклассической физике, как это признал и Бор, математический формализм теории зачастую далеко опережал физическое истолкование” [33, с.142]. Неклассическая физика стала использовать математические методы и структуры, которые ранее не применялись в естествознании, например, некоторые разделы алгебры, гармонического и функционального анализа, нашедшие неожиданные применения в квантовой механике и квантовой теории поля.

Эвристическая сила математики при создании неклассических теорий являлась, по мнению Нильса Бора, характерной чертой формирования этих теорий. Важнейшим инструментом квантовой теории, заменяющим понятие траектории, является вероятностное распределение или “волновая функция” частицы в точке $x \in \mathbf{R}$, $\psi(x)$. Точнее, квадрат модуля этой функции является вероятностью обнаружения частицы в интервале $(x, x + dx)$, равный $|\psi(x)|^2 dx$. Волновая функция – это и есть полное описание ее состояния, в том смысле, что это все, что можно узнать про частицу. В этом состоит первый фундаментальный факт квантовой теории. Если волновая функция в данный момент времени t известна, то в последующие моменты она определяется известным дифференциальным уравнением Шредингера первого порядка. Нетривиальность квантово-механического описания, с математической точки зрения, состоит в том, что, в отличие от конечномерного пространства возможных состояний в классической теории, точнее двумерного, соответствующего двум числам x и v , в квантовой теории пространство состояний бесконечномерно, поскольку исследуются функции координаты x . Мы не можем знать одновременно координату и скорость частицы, но можем

рассмотреть распределение вероятностей и для скоростей, точнее для импульсов $p = mv$, обозначаемое через $\varphi(p)$. Вторым фундаментальным фактом, получаемым с помощью математического формализма, состоит в том, что в квантовой теории второе распределение $\varphi(p)$ не является независимым и полностью определяется распределением $\psi(x)$. Эти функции связаны преобразованием Фурье:

$$\varphi(p) = 1/(2\pi\hbar)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{ipx/\hbar} dx,$$

где \hbar – постоянная Планка. Теория интегрального преобразования Фурье, основы которой заложил французский математик Жан Фурье, “достаточно сложна и преподносит немало неожиданностей” [79, с.192]. Но, чтобы успешно использовать преобразование Фурье, а точнее то, что математики называют “гармонический анализ”, не обязательно владеть этой теорией в полном объеме. Важно то, что можно воспользоваться обратным преобразованием Фурье, чтобы по функции $\varphi(p)$ получить исходную функцию $\psi(x)$. Эти преобразования дают математическое объяснение экспериментального факта, что, чем точнее удастся измерить координату частицы, находящейся в данном состоянии, тем больше “разброс” результатов измерения ее импульса и наоборот, что составляет фундаментальный квантово-механический принцип неопределенности Гейзенберга. Дело в том, что преобразование Фурье функции, носитель которой сконцентрирован в окрестности точки, будет “расплываться” тем больше, чем более “сжата” исходная функция.

Преобразование Фурье – это фундаментальное математическое понятие, связанное с понятием двойственности, и выходящее по своему содержанию за пределы математического анализа. За явлением дополненности в физике стоит ясный математический механизм. Наличие преобразования Фурье показывает, что между обеими дополнительными картинками мира существует математически точная и даже нетривиальная связь. Поэтому, с математической точки зрения, представлять дополнительные способы описания действительности как ортогональные или не имеющие отношения друг к другу неверно. Как правило, сначала теорию формулируют как можно точнее, а затем пытаются понять, что она говорит о реальности. Принято считать, что квантовая теория раскрывает нечто новое и необычное о природе реальности. Можно предположить, что эффективность квантовой теории в способности предсказывать результаты экспериментов обусловлена и имеющимся для ее описания нетривиальным математическим формализмом. Чтобы не потерять реальную математику в ее эволюции при разрастании математических теорий, необходимо придерживаться принципа единства логического и исторического. Во время обсуждения спорных точек зрения Нильс Бор говорил: “Вопрос заключается не в том, является ли то или иное положение истинным, а в том, какие подлинные аргументы мы можем извлечь из имеющейся информации для его доказательства” [143, с.182]. Проблема создания фундаментальной теории осложняется своеобразием новой области явлений, требующей для своего описания понятий, расходящихся с привычной концептуальной схемой. Сущность развития теоретической математики состоит во взаимодействии

процессов дифференциации и интеграции знания, а поскольку в основе такого взаимодействия заложено противоречие, то и понимание проблемы природы математических объектов и проблемы истинности математического знания, соответственно, эволюционирует.

В соответствии с этим исследование внутренних проблем, встающих перед философией математики, происходит в настоящее время двумя способами: в русле фундаментализма и в нефундаменталистском направлении, хотя, по всей видимости, считает философ математики А.Г. Барабашев, “эти два направления в целом равноправны и взаимно дополняют друг друга” [12, с.92]. Напомним, что первое направление подчиняет исследование математики выяснению проблемы сущности математики, не зависящей от ее конкретных исторических состояний. Оно связано с математической логикой, ориентируясь на сравнительное изучение и разработку концепций математического платонизма, интуиционизма и различных формалистских построений. Второе направление исследует функционирование математики и претендует на постановку и решение проблем концепций развития математики, связанных с поиском схем этого развития, местом математики в культуре и осмыслением исторических закономерностей изменения и развития математики. В фундаменталистской традиции под математикой подразумевается, в первую очередь, математическое знание. Эти два направления взаимно дополняют друг друга в методологическом аспекте широкого толкования принципа дополнительности. Наиболее известными и хорошо развитыми областями фундаменталистской философии математики, в которых ищется единая сущность и непреходящие стандарты математического доказательства, являются концепции логицизма, интуициализма, формализма и их “критические” и “посткритические” разработки. Нефундаменталистская философия математики создает новый образ математики как сложной системы, состоящей из знаний, производящего и воспроизводящего эти знания субъекта, математических инструментов, а также целей и образцов деятельности по производству нового математического знания. В важнейшие моменты своей истории развитие математики определяется внешними факторами, обусловленными определенным социокультурным контекстом. Например, таким значимыми моментами была эпоха зарождения математики как науки в Древней Греции и создание математики переменных величин в Новое время.

В “нормальные периоды” развитие математики определялось внутренней логикой развития самого предмета. Причинами, приводящими к разрывам гладких детерминированных процессов развития математики, служили внешние факторы, которые можно рассматривать также и в социокультурном контексте. Следует отметить, что математика отчасти потенциально свободна от влияния культурной среды в своем развитии, поскольку объективный мир обладает некоторой устойчивостью, которую мы можем лишь более или менее адекватно отображать в своих условно субъективных абстрактных логико-математических построениях. Однако сформулированный Нильсом Бором принцип дополнительности имеет универсальную методологическую значимость. Говоря о “парадоксальности” рациональности философ и

методолог науки В.Н. Порус выделяет в этом принципе следующее: “В наиболее общей форме этот принцип требует, чтобы для воспроизведения целостности исследуемого объекта применялись “дополнительные” классы понятий, которые, будучи взяты отдельно, могут взаимно исключать друг друга” [145, с.195]. Отсюда исходят представления о различных типах рациональности. Исходя из такого положения вещей, следует быть готовым к тому, что всесторонний анализ, например, обоснования математики, может потребовать различных точек зрения по поводу таких фундаментальных понятий математики как число, множество и так далее, которые препятствуют однозначному описанию. Даже глубокий анализ любого понятия и его непосредственное применение, по мнению Бора, взаимно исключают друг друга. Эти расхождения привели к выделению альтернативных программ обоснования математики, основными из них в XX веке считались логицизм (программа Фреге), интуиционизм (программа Брауэра) и формализм (программа Гильберта). Существенным фактором их создания было то, что различия между первоначальными вариантами этих программ обоснования имели не только специфически математический, но и философский характер.

Проблема оснований стояла перед высшей математикой на протяжении всего XIX века. Ее пытались решить с помощью выражения основных понятий математического анализа через понятия арифметики, например, определить действительные числа в терминах натуральных чисел. Поэтому логицизм Готлоба Фреге можно рассматривать как дальнейшее развитие программы арифметизации математики, с целью поставить ее на прочное основание. В более широкой трактовке, логицизм известен как учение, согласно которому математика сводима к “чистой логике”, хотя такое определение понятия “логицизм” довольно расплывчато, поскольку не определен термин “чистая логика”. Можно сказать, что логицизм рассматривают не как единый взгляд на природу математики, а как специальный тезис об отношении логики к математике. В отличие от основоположника математической логики английского математика Джорджа Буля, построившего формальную логику в виде некоторого исчисления, то есть алгебру логики, как техническое средство для решения логических задач, немецкий математик Готлоб Фреге понимал логику как искусственную знаковую систему, абстрагированную от содержания используемых знаков. Его целью являлся язык, а не просто исчисление, и он исходил из различения грамматических и логических структур. Принято считать, что крушение логицизма обусловлено дефектами естественного языка, но можно предположить, что трудности при построении логического основания арифметики вытекают из того, что арифметика и геометрия, как дополнительные структуры, имеют общий источник. Увидеть, насколько далеко математика выходит за рамки утверждений, которые могут претендовать на реальный смысл и истинность, основанную на очевидности, смог голландский математик Лейтзен Брауэр. Его постоянный оппонент Давид Гильберт был согласен с ним в том, что многие математические утверждения не являются “реальными” в указанном смысле.

Однако он настаивал на том, что нереальные или “идеальные” предложения необходимы для полноты математической системы. Это по существу проявление фундаментальной дихотомии “реальное – нереальное” в одной из самых влиятельных программ современной математики. Поиск абсолютной надежности был основной мотивировкой для концепций Брауэра и Гильберта. Но можно задать и такой вопрос: нужна ли математике для своего оправдания абсолютная надежность? Ни к какой другой науке не предъявляются такие требования, даже в физике ее теории гипотетичны. Эти вопросы можно решать и в нефундаменталистском ключе, хотя соответствующее направление в философии математики пока не имеет таких же традиций, как исследования в русле течений фундаментализма. Нефундаменталистский подход, занимающий все большее место в работах по философии математики, направлен на рассмотрение объектов математики с точки зрения их развития в социокультурном контексте и на обнаружение общих закономерностей этого развития. В таких философских построениях отсутствует намерение установить единую вневременную сущность математики. Любопытно также то обстоятельство, что математическое сообщество обладает способностью отделять правильные доказательства от ошибочных и устанавливать окончательность доказательства в исторически ограниченный срок. Однако окончательное принятие математической гипотезы может оказаться, в определенной мере, иллюзорным, поскольку то, что ранее было социализировано, способно снова перейти в разряд проблематичного в силу изменения общих представлений о допустимом и недопустимом в математике. В любой неформализованной классификации ощущается условность, размытость и нестрогость деления. Это можно сказать и о философской концепции Карла Поппера, так как вопрос об отношениях между его тремя мирами крайне запутан.

Однако можно отметить, что значительная часть современной математики в контексте нефундаменталистского направления имеет пересечение со всеми тремя мирами Поппера, поскольку взаимодействие между ними осуществляется при посредстве человеческого разума. Его рассуждения сводятся к тому, что в лучшем случае мы можем надеяться только на то, что та или иная теория окажется истинной, поскольку научные результаты остаются гипотезами, хорошо проверенными, но не установленными и не доказанными как истины. Говоря о гипотетичности современной физики, сам Карл Поппер предполагал, что ей может соответствовать некий “метод смелого, авантюрного теоретизирования”, подвергаемый затем строгой проверке. Исходной точкой научного исследования, по Попперу, является не наблюдение и не собирание отдельных фактов, а скорее догадка, предположение или гипотеза. Дополнительность в основном методе опытных наук проявляется даже в его названии – “гипотетико-дедуктивный метод”. Согласно Попперу, никакого “логического метода” формирования гипотез не существует – это происходит во многом благодаря интуиции, а из гипотез дедуктивно выводят следствия, которые подтверждаются или опровергаются с помощью наблюдений и единичных фактов. В физике, так же как и в математике, бесконечность

относится к нашим идеализациям, источники которой следует искать в особенностях нашего мышления. Однако в физике могут существовать бесконечности принципиально неустранимые, поэтому, осознавая неоднозначность бесконечности, физики признают трудность и значимость понятия бесконечности, но только в рамках соответствующей теории. Нельзя не отметить новую дихотомию во взаимодействии двух областей человеческого знания – математики и физики.

Если раньше математика традиционно считалась языком физики, то на современном этапе развития науки можно “перевернуть” известное изречение Юджина Вигнера о “непостижимой эффективности математики в естественных науках” и пора говорить о “непостижимой эффективности теоретической физики в математике” [68, с.1027]. В конце XX века появилось много работ, в которых современная физика служит источником новых математических идей, поэтому не только математика является языком физики, но и физика становится языком математики. Примером, поясняющим расплывчатость некоторых исходных математических идей, служит использование операции образования “множества всех подмножеств” при построении иерархии множеств. Да и само понятие множества балансирует на хрупкой грани осмысленного и неосмысленного. Идущий против общего течения А.А. Марков, высказывая претензии к теории множеств, в частности, подтрунивал в связи с этим над “множеством всех человеческих добродетелей”. Великие идеи важны для развития математики, но они часто неясны и расплывчаты, поэтому должны быть записаны в точной математической форме, без какой-либо неопределенности, как например, идея “гладкости”, приводящая к понятиям непрерывности, дифференцируемости и аналитичности, или идея “композиции двух операций”, приводящая к теории групп, полугрупп и категориям. С другой стороны, именно благодаря расплывчатости по-настоящему значительных научных истин, они поддаются многим полезным уточнениям и интерпретациям. Это следствие того, что незнание гораздо разнообразнее по своим формам, чем знание. Умножая свое знание, мы еще больше умножаем незнание, избавляясь от иллюзий здравого смысла, когда оказывается, что ответы на многие вопросы на самом деле нам неизвестны. Совокупное человеческое знание конечно, зато невежество потенциально бесконечно, и рассуждая совместно, мы, возможно, преумножаем не столько знание, сколько свое незнание.

Определенную угрозу для дальнейшего развития теорий математик и логик А.С. Есенин-Вольпин видит “в традиционной манере “понимать” правила мышления в терминах прославленных математических аппаратов там, где нужно всего лишь пристально проследить значение терминов и нить вопросов, а также облекать ответы в логически неоспоримую форму” [64, с.112]. Количество мыслимых методов необозримо как континуум, поэтому их выбор надо стараться производить, проследивая необходимые связи, хотя в практической деятельности часто этот выбор делается даже без знания точной формулировки методов. Сейчас методология наук, вообще говоря, является делом искусства, а не точной науки. Поэтому формализм должен быть

дополнен некоторыми “семантическими” рассмотрениями платонистского характера. Но решение проблем такого рода упирается в трудность изучения семантики рассматриваемых теорий, то есть в трудность изучения способа понимания формул теории. Одна из важнейших методологических задач математики состоит в описании мира не только с точки зрения открытых в нем законов, но и с точки зрения законов, которые могут в нем установиться. Математика как язык науки способна специфически оформлять высказывания, как о законах мира действительного, так и законах возможных миров. Многие философы не без оснований считают главной проблемой методологических размышлений Нильса Бора проблему неточности и ограниченности разговорного языка как средства научной коммуникации. Известный способ “приручения” бесконечности связан с использованием особого символического языка, позволяющего вводить математические абстракции. Работать с бесконечностью позволяет аппаратно-понятийная математическая форма, ограничивающая содержание и превращающая бесконечность в конечное. Абстракции и являются той формой, в которой происходит “кодирование” бесконечности. Определенные трудности возникают в связи с тем, что у понятий, которые математики сами создали, нет иной “жизни”, кроме как в их воображении, а объекты, существующие в реальном мире, не тождественны представлениям о них, поскольку они всегда приближительны и неполны.

Группа французских математиков Бурбаки, веря в объективность математики, охотно принимали недоказуемое метафизическое допущение, согласно которому математика в основе проста и для любой математической задачи имеется наилучший и оптимальный путь ее решения. Эта вера имела достаточные основания, поскольку в некоторых случаях программа логизации основных математических понятий в известной степени удалась, несмотря на то, что в целом ее результаты оказались обескураживающими. Это привело к “психологическому кризису” в математике, подобному известному “психологическому кризису” в физике начала прошлого века. Парадоксальным выходом из этого “кризиса” стало относительное возращание роли интуитивного элемента в математике и физике, несмотря на достигнутые успехи логического анализа. “Признание фундаментальной роли интуитивного суждения наравне с логикой, – считает академик Е.П. Фейнберг, – представляет собой коренное изменение методологии математики и физики (а значит, и вообще естественных наук)” [165, с.43]. Основу единства знания Нильс Бор искал не в построении единого языка науки, а в нахождении сходства теоретико-познавательных ситуаций, требующих для своего анализа дополнительной системы понятий, которая способствовала бы устранению субъективных элементов и расширению объективного описания.

3.2. Программа Гёделя и направления развития философии математики

Достижение методологических целей обоснования математики, которые ставили перед собой формалистски и интуиционистски мыслящие философы

начала прошлого века, оказалось не таким простым делом. Еще на грани XIX и XX веков в теории дифференциальных уравнений и динамических систем, трудами А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова, было математически формализовано понятие устойчивости. Суть его состоит в том, что система может в принципе хорошо себя вести, но при небольших погрешностях в начальных или граничных условиях начинает существенно удаляться от желаемого поведения. Это приводит к тому, что привлекательно, с точки зрения приложений, выглядящая теорема может стать бесполезной при малейшей модификации исходных условий, поскольку точно удовлетворить им довольно часто нет возможности по вполне объективным причинам физической точности измерений. Пример исключительно устойчивого результата представляет собой теорема Гёделя о неполноте, так как любая попытка методологически обойти эту теорему, не ослабляя существенно достоинства формализованного языка математики, приводит к тому, что “сама попытка дает материал для построения примера, где она проваливается” [124, с.122]. При попытках использования теоремы Гёделя в качестве философского аргумента в оценке состоятельности программы формализма неизменно привлекается понятие непротиворечивости арифметики. В таком контексте имеет смысл говорить о локальной непротиворечивости, так как вопросы о глобальной непротиворечивости могут оказаться избыточными.

Наблюдая за развитием такого мощного современного направления, как компьютерная математика и отвечающая ей логика, которое принято называть сейчас “информатикой”, можно предположить, что она вместе с утонченным формализмом современной математической логики может стать основанием синтеза в философии математики, способного сблизить направления развития разветвленного и утонченного математического формализма в духе математического реализма. В связи с появлением парадоксов, возникающих при не слишком аккуратном обращении с бесконечными множествами, в конце XIX века появилось несколько противоборствующих направлений, по-разному отвечающих на вопросы о сущности математических построений и о соотношении математических объектов реальности. Наиболее известным и развитым среди них был формализм Гильберта, который предложил свою теорию математических доказательств. Исходя из убеждения, что множество истинных формул совпадает с множеством выводимых утверждений, Давид Гильберт ожидал, что, применяя аксиоматический метод при формальной работе с математическими понятиями и знаками, никогда не получится противоречивое высказывание. Но теоремы Гёделя о неполноте по существу показали ограниченность программы Гильберта. Программные результаты австрийского математика Курта Гёделя стали первыми, наиболее широко прозвучавшими, рефлексивными результатами математической логики. До теорем Гёделя было общепринято считать, что математическая теория должна быть полной и непротиворечивой, то есть она может быть уточнена таким образом, чтобы любое истинное математическое утверждение, хотя бы в принципе, могло быть доказано и такое уточнение было бы непротиворечивым. Поэтому теоремы Гёделя, как препятствия на пути формализации математики,

принимаются рассудком, но чисто эмоционально они многими математиками отвергаются. И этому есть вполне обоснованные объяснения.

Программу Гёделя по обоснованию математики можно анализировать с философской и методологической точек зрения. Не только с точки зрения теоремы, находящейся внутри математической логики или оснований математики, а как факт, который что-то говорит о мышлении математика, даже человека вообще, и о его творческом процессе. Открытия Гёделя привели к пересмотру парадигмы классической математики, поскольку надежды на косметическое обновление с помощью “гильбертовских заклинаний” в целом не оправдались. Это имело и гораздо более серьезные последствия, так как повлекло за собой глубокое изменение философского взгляда на математику. Из теоремы Гёделя следует, что любая формальная математическая система неполна, то есть в ней могут быть недоказуемые и непроверяемые утверждения. Поэтому, следует учитывать это обстоятельство при построении “картины мира”, а именно, возможность столкнуться с указанной гёделевской трудностью. Если квантовая механика окажется права, то “мир явно не в своем уме”, предостерегал нас Альберт Эйнштейн, поскольку атомные частицы непонятным образом составляют нечто целое, что, возможно косвенно, влияет как на наше рациональное мышление, так и на наши изотерические и виртуальные представления. Само понятие “виртуальный” двойственно, так как соединяет в себе два противоположных значения: “возможный”, “мнимый” и “фактический”, “действительный”. Михаил Эпштейн считает, что слово “virtual” потому и сделало такую блестящую карьеру в английском, а затем и в других языках, что оно означает особое свойство: “быть реальным в своей ирреальности” или “быть актуальным в своей потенциальности” [176, с.245]. Механистическое видение мира бессильно объяснить интуицию и мотивы человеческого поведения. Например, даже пространство зрительного восприятия, как оказалось, довольно сложно организовано и характеризуется геометрией Лобачевского. Интересно в связи с этим отметить, что сам Лобачевский называл свою геометрию “воображаемой”.

Вообще говоря, иррациональное может быть в принципе недоступно “евклидову уму”. Даже в основании рационального подхода, согласно утверждению Карла Поппера, лежит иррациональная вера в разум. Стоит также напомнить о затруднениях, с которыми столкнулись Декарт и Кант в практической реализации своих принципов рациональности. Для Рене Декарта барьером стал математический анализ с его “неясными” и потому для него “нерациональными” понятиями бесконечно малой величины и дифференциала. Даже Иммануил Кант собственную неспособность представить геометрию, отличную от евклидовой, счел достаточным основанием для несуществования других геометрий. Идея об идентичности математического и физического мира в XIX веке стала противоречить фактам. Неевклидовы геометрии показывали, что математические теории не определены физическим опытом и нуждаются в особом обосновании. Принято считать, что неевклидовы геометрии опровергают априорную интуицию пространства, из которой исходил Кант. Неевклидовы геометрии, по мнению авторитетного философа математики

В.Я. Перминова, следует противопоставлять не учению Канта о евклидовом пространстве, как “единственно возможной форме чувственного восприятия”, а только его “трансцендентальному учению о методе”, то есть “учению о допустимых объектах и правилах математического рассуждения” [135, с.32-33]. На самом деле, более корректное утверждение состоит в том, что неевклидовы геометрии только доказывают возможность существования логически непротиворечивых систем, нашедших применение в физических теориях “пространства-времени”, но они не колеблют естественной интуиции “реального пространства”.

Специфика научных теорий, процесс изучения которых влияет на изучаемый объект, состоит в том, что в этом случае приходится вести гораздо более глубокий логический анализ, чем в случае “классических теорий”. В “неклассических теориях” приходится тщательно соблюдать некоторые предосторожности, чтобы избежать смешения теории и метатеории, а также элементарных актов, связанных с изучением предмета, и элементарных актов, происходящих внутри изучаемого предмета. “Все это говорит о том, – подчеркивал математик и логик А.А. Ляпунов, – что необходимо развитие методологии научных теорий, в особенности таких теорий, где предмет и метод изучения сложным образом переплетаются между собой” [103, с.50]. Анализируя программу Гёделя, нельзя не учитывать общий философский фон рубежа XIX и XX веков. Можно отметить и тот факт, что Курт Гёдель был членом философского “Венского кружка”, представители которого, опираясь на идеи Людвиг Витгенштейна, внесли определенный вклад в решение сложнейших философско-методологических проблем, в том числе таких, как возможности математизации знания, соотношение теоретического аппарата и эмпирического базиса науки, а также выявление роли знаково-символических средств в научном познании. Для психологической атмосферы того времени, благодаря которой многие математики акцентировали внимание на изучении формы в ущерб содержанию, характерны недооценки глубочайших философских проблем, связанных, прежде всего, с соотношением духовного и материального и названных “псевдопроблемами”. Именно в это время метаматематика, то есть рассуждение о математике, оформилась в вполне самостоятельный раздел современной математики.

Предмет математики составляют сами формальные системы, которые придумывают математики, а предмет метаматематики – описание таких формальных систем, выяснение и обсуждение их свойств. К метаматематике относятся и теоремы Гёделя о неполноте, хотя по построению это математическая работа. Так ее собственно и воспринимает большинство математиков и логиков. Повышению интереса к теории математического вывода способствовала программа Гильберта, сводящаяся к требованию “математизации метаматематики”. “В связи с этим, – отмечает философ математики В.Э. Войцехович, – понятие метаисследования в применении к математическому познанию расщепляется на понятие предметного (собственно математического) метаисследования и гносеологического (гильбертовского) метаисследования, относящегося к основаниям математики” [39, с.120]. Для

обоснования теоретико-множественной математики гениальный Давид Гильберт предложил программу исследования математических доказательств методами новой математической дисциплины – метаматематики, или теории доказательств. Для Гильберта слово “доказательство” в его теории означало все же формальный вывод. Но, как оказалось, между двумя дополнительными составляющими теории доказательств – принятыми интуитивными доказательствами и изучаемыми формальными доказательствами – математические роли распределены не так, как об этом думал Гильберт. Основное достижение Курта Гёделя состоит в соединении реалистических и идеалистических традиций. Программу Гёделя как первое воплощение в жизнь реалистических математических замыслов можно сравнить с выводом математических законов из физических концепций.

Одной из основных причин успеха программы Гёделя было то, что его результаты можно хорошо интерпретировать в терминах таких традиционно реалистических понятий как арифметическая истинность и логическая общезначимость, которые игнорировались в конструктивистских схемах. В математике идеалистические традиции отражаются в различных формах конструктивистских подходов к основаниям, акцентирующих внимание на определениях и доказательствах в процессе математического познания. Другой, дополнительной причиной успеха программы Гёделя было свободное обращение с понятиями, исходящими из конструктивистских программ, таких как интуиционистская логика и формальные системы. В этом по существу проявляется дуализм методологического подхода Гёделя, который в широком толковании утверждает равноценность любых противоположных моментов, как в реальной действительности, так и в процессе познания. При этом следует иметь в виду, что любые классификации достаточно условны. Даже в конструктивистских подходах можно рассматривать совершенно различные направления, например, “псевдоклассическое”, когда подобно “эллинской” стадии конструктивные и дескриптивные аспекты сливаются воедино, не затрагивая при этом классической логики и привычного понятия истинности, и “неклассическое”, в котором математика рассматривается как наука об эффективных мысленных построениях, а логика, приспособившаяся к методам новых построений, модифицируется с целью гарантии конструктивности таких построений. Во многих отношениях наиболее близкий член семейства неклассических логик к классической логике – это интуиционистская логика, для которой существует несколько разнородных классов семантик для неклассических логик.

В современной математике “псевдоклассическое” направление берет начало у Анри Пуанкаре, стремившегося выделить результаты классической математики, которые можно получить без аксиомы выбора, как наиболее надежные, и уделявшего основное внимание определениям. Заметим, что такие утверждения как аксиома выбора или континуум-гипотеза сформулированы с учетом всех требований рациональности. Поэтому утверждения об их относительной ценности бросают тень сомнения и на само понятие рациональности. По мнению известного философа науки В.В. Целищева, “это

будет означать, что на некотором этапе развития математики мы можем сформулировать на первый взгляд рациональные утверждения, которые таковыми не окажутся при более тщательном анализе” [170, с.17]. Это еще одно косвенное основание для возможности внерационального подхода в обосновании философских проблем математики. К “псевдоклассическому” направлению можно отнести и программу формализации Гильберта, которая выглядит более рациональной. Поскольку большинство математических утверждений не имеет реального смысла, то задача математики – давать правдивые результаты хотя бы на некотором множестве сравнительно простых правдоподобных утверждений. Хотя классическая математика обосновывается коллективным опытом научного сообщества, ее окончательное обоснование, по Гильберту, даст теория доказательств, существенной частью которой является формализм и аксиоматический метод. Замена классической математики на интуиционистскую бессмысленна, так как последняя, по его мнению, неполна. Однако для того, чтобы теория доказательств оставалась жизнеспособной в дальнейшем, она должна заниматься также и интуитивными доказательствами. Кроме того, с физической точки зрения, если бы программа Гильберта оказалась работоспособной в полном объеме, то это было бы “плохой новостью” для некоторых концепций реальности, поскольку при этом устранялась бы необходимость “понимания” при критическом анализе математических идей.

Вопрос о формализации, математической строгости и гильбертовском идеале чистоты методов намного тоньше, чем принято было считать до результатов Курта Гёделя. Логическая составляющая этого вопроса направлена на то, чтобы установить пределы возможностей достижения чистоты методов, если не во всей математике, то хотя бы в самой логике и метаматематике. Другая составляющая – это методологический вопрос о том, в какой мере для математического анализа чистота метода фундаментальное понятие. Недостатки идеалов яснее всего видны там, где их удалось реализовать, поэтому можно сравнивать результаты как с первоначальными ожиданиями, так и с альтернативными или дополнительными подходами, которые, возможно, даже противоречат рассматриваемому идеалу. Но такой анализ тоже можно считать не слишком убедительным, поскольку, как заметил Карл Поппер, “даже тщательная и последовательная проверка наших идей опытом сама в свою очередь вдохновляется идеями” [144, с.423]. Для понимания теорем Гёделя о неполноте необходимо различать математический и философский смысл понятия “полноты”. Система аксиом является полной, если каждая правильная и замкнутая, то есть не зависящая от параметра, формула дедуктивно охватывается системой аксиом в том смысле, что либо она сама, либо ее отрицание выводимы в ней. В контексте философских рассуждений Декарта тоже появляется слово “полнота”, как полнота бытия или полнота воли, в отличие от мысли, понимаемой как закон или нечто “законосообразное”. Поясним различие понятий замкнутости и полноты на примере неархимедова нормирования. Пусть p – простое число, $p > 1$, тогда для произвольного ненулевого целого числа a положим $\text{ord}_p a$ равным кратности

вхождения p в разложение a на простые сомножители, а для произвольного рационального числа $x = a/b$ положим $\text{ord}_p x$ равным $\text{ord}_p a - \text{ord}_p b$. Определим на множестве рациональных чисел \mathbb{Q} неархимедову норму $\|x\|_p = p^{-\text{ord}_p x}$, если $x \neq 0$, и $\|x\|_p = 0$, если $x = 0$. Норму, не являющуюся неархимедовой, называют архимедовой. Например, абсолютная величина на поле \mathbb{Q} является архимедовой нормой. Основное отличие p -адических метрик от обычного расстояния, определяемого абсолютной величиной, состоит в том, что для них не выполняется аксиома Архимеда.

С помощью этой классической архимедовой метрики поле рациональных чисел \mathbb{Q} пополняется до поля вещественных чисел \mathbb{R} , то есть к нему присоединяются все пределы последовательностей Коши рациональных чисел, а затем уже поле \mathbb{R} расширяется до поля комплексных чисел \mathbb{C} . Для того чтобы поле \mathbb{C} стало алгебраически замкнутым, то есть чтобы все полиномиальные уравнения с коэффициентами из \mathbb{C} были разрешимы в \mathbb{C} , достаточно было, что самое удивительное, присоединить к \mathbb{R} только корень одного уравнения $x^2 + 1 = 0$, а именно $i = \sqrt{-1}$. Таким образом, поле \mathbb{C} алгебраически замкнуто и полно относительно архимедовой метрики. Но множество рациональных чисел \mathbb{Q} допускает бесконечно много расширений-пополнений относительно p -адических метрик для каждого простого числа p , в результате чего мы получаем не вещественные числа, как в случае обычной метрики, а p -адические числа. Однако, пополнив поле \mathbb{Q} относительно неархимедовой метрики $\|x\|_p$, для построения алгебраически замкнутого поля, во-первых, придется рассматривать бесконечную последовательность расширений, задаваемых присоединением корней уравнений старших степеней, а во-вторых, построенное в результате этих процедур алгебраически замкнутое поле \mathbb{Q}_p не полно. Непротиворечивая формальная система, удовлетворяющая условиям теоремы Гёделя, тоже неполна и добавляя к ней, как в принципе дихотомии, либо неразрешимое в данной системе предложение, либо его отрицание, получим новую неполную систему. Это и есть современная математическая жизнь альтернативных теорий. Отметим, что пополнение рациональных чисел иррациональными числами играет фундаментальную роль в геометрии и физической картине мира. С другой стороны, дополнительный способ описания дает p -адические пополнения рациональных чисел, которые, за исключением p -адических аналогов квантовой механики и различных моделей квантовой теории поля, рассмотренных академиком В.С. Владимировым и его учениками в монографии “ P -адический анализ и математическая физика” [38], пока не использовались содержательным образом в естествознании в целом.

Современный этап развития философии математики можно назвать “постгёделевским”. В самом названии постгёделевской философии математики еще звучит ориентация на предыдущую эпоху развития математического знания, но по существу уже можно говорить о начале принципиально новых взглядов и подходов в проблеме обоснования математики. Уточняя понятие постгёделевской философии математики, заметим, что математики смотрят на прошлое не как на предпосылку, а как на необходимую составную часть величественного здания современной математики. Важнейший результат Курта

Гёделя, а именно, доказательство принципиальной неполноты достаточно богатых формальных систем, в том числе аксиоматической теории множеств, был опубликован в статье “О формально неразрешимых предложениях Principia Mathematica и родственных систем” (1931). Теорема Гёделя впервые появилась в виде “теоремы VI” этой работы и утверждала следующее: “Каждому ω -непротиворечивому рекурсивному классу формул k соответствует рекурсивный символ классов r такой, что ни $vGenr$ ни $Neg(vGenr)$ не принадлежит к $Flg(k)$, где v – свободная переменная r ” [168, с.17]. В оригинале это было написано по-немецки. Большинство математиков и философов математики сочтут, что и эту формулировку с тем же объемом понятности можно было оставить на немецком. На более понятном языке это утверждение означает следующее: все непротиворечивые аксиоматические формулировки теории чисел содержат неразрешимые суждения. Первая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что если формальная система, содержащая арифметику, непротиворечива, то она неполна, то есть содержит истинные утверждения, которые недоказуемы и неопровержимы в этой системе. Полнота системы буквально означает, что каждое общее утверждение об объектах, к которым относятся аксиомы, может быть получено из этих аксиом с помощью вывода.

Формальная система в конструкции Гёделя состоит из конечного множества символов и конечного числа правил, по которым эти символы можно объединять в формулы или предложения, часть их которых рассматривается как аксиомы. Каждый, кому доводилось изучать элементарную геометрию, знает, что она строится как дедуктивная наука, отличаясь этим от экспериментальных знаний. Еще в Древней Греции была понята сила и возможности логического доказательства и именно греческие математики открыли “аксиоматический метод” для изложения геометрии, который наиболее широко стал применяться в течение двух последних столетий. Поэтому вполне естественным выглядело в среде математиков убеждение, что для любого раздела математики можно указать набор аксиом, достаточный для вывода всех истинных предложений этой науки. Работа Гёделя показала несостоятельность такого глубоко укоренившегося убеждения. Возможности аксиоматического метода оказались существенным образом ограничены. Мощности дедуктивных методов не хватает даже на то, чтобы из конечного числа аксиом вывести все истинные утверждения о целых числах, сформулированные на языке школьной алгебры, то есть формально нужно иметь бесконечно много новых идей. При общепринятом понимании смысла теоремы Гёделя, утверждающей, что полного финитно описываемого набора аксиом арифметики не существует, творческий характер математики выявляется с особой силой. В проблеме обоснования математических теорий следует различать два уровня рассуждений – гносеологический и логический. Например, так называемый “финитный” способ доказательства непротиворечивости – это по существу логический факт, состоящий в выводимости определенным способом некоторых формул.

Но на каком основании мы доверяем финитному рассуждению? В отношении мира математических сущностей специалист по теории

доказательств Гаиси Такеути считает, что “поскольку наш разум конечен, для нас, в конце концов, это воображаемый мир, каким бы ясным и прозрачным он ни казался” [156, с.110]. В стремлении преодолеть это “экзистенциальное отчаяние” философы математики пытаются найти убедительные аргументы в существовании такого мира. Убеденность в “фактической” непротиворечивости предполагает также некоторое гносеологическое рассуждение. Поэтому обоснование математической теории не сводится только к логическим процедурам, а предполагает разработку некоторой гносеологической концепции достоверности, оправдывающей нашу веру в определенные средства доказательства. Резюмируя, можно сказать, что хотя открытия Гёделя и разрушили старые надежды, подкрепленные было исследованиями по основаниям математики, они, в тоже время, обогатили эти исследования новыми методами рассуждений и способствовали переоценке перспектив философии математики и философии науки в духе новых идей квантовой механики. Когда математик прерывает бесконечную операцию вычисления, он считает, что в принципе эта операция бесконечно воспроизводима, и поэтому ее можно предположить завершенной. Поскольку постигнуть завершенное бесконечное человеку не дано ни путем откровения, ни путем мистического восприятия, то математики выражают завершенное бесконечное в символах и знаках. С течением времени нестрогие доказательства стали встречаться на практике все чаще, поэтому их надежность, вообще говоря, не зависит от гипотетически возможного “чистого”, но не реализованного доказательства.

Доказательство в общем случае не гарантировано от неявных допущений в языке. Поэтому принципиальный вопрос обоснования состоит в том, существуют ли в математике окончательные доказательства? Философ математики Имре Лакатос предполагал, что содержательные доказательства только гипотетичны. Более того, и формальные доказательства, хотя и могут быть сами по себе вполне надежными, тоже являются гипотетичными, так как могут противоречить неформальным теориям, выступающим в качестве интуитивной основы формализованной теории. В силу этого, значение теоремы Гёделя о неполноте оказывается довольно тонким вопросом в проблеме обоснования математической строгости. Основной философский смысл результатов Гёделя состоит в том, что мышление человека богаче любых его дедуктивных форм и что нельзя, основываясь на формальной логике, смоделировать искусственный интеллект. “Характерная черта современных оснований математики состоит в том, – отмечает специалист по анализу прикладных решений Джон Кедвэни, – что, с той теоретической перспективы, которую выстраивает современная математическая логика, математика в целом оказывается столь разорванным и раздвоенным способом интеллектуальной деятельности, как это может представиться только в самых ужасных постмодернистских видениях” [187, с.162]. С точки зрения современной теории познания, математик, принимая некоторое “предварительное” основание, на которое он, насколько это возможно, опирается в своей работе, должен помнить о том, что принятое им основание не защищено от “гёделианского

скептицизма”. Можно сказать, что именно такие “саморазрушительные интеллектуальные упражнения” и рекомендует постмодернизм. Вопреки определенным усилиям философов представить результаты Гёделя как сенсацию, его теоремы все же не оказали “революционного влияния” ни на представление о своей науке большинства работающих математиков, ни тем более на их практическую деятельность. То есть, как принято сейчас говорить, смены научной парадигмы, в смысле Томаса Куна, не произошло.

Курт Гёдель не изобрел математическую логику, но он глубоко изменил своими исследованиями содержание этой науки. Гёдель доказал, что если достаточно богатая формальная система непротиворечива, то в ней обязательно имеются формулы, которые истинны, но не являются доказуемыми. Но так ли уж необходимо нам знать все истины? Истинность теоремы – это лишь часть знания, содержащегося в ее доказательстве. Загадочное несоответствие человеческой и формальной логики отражено в несоответствии между понятием “истинности” и понятием “доказуемости”. Удивительно и то, что даже способы рассуждений Гёделя, используемые им в доказательстве, по-видимому, невозможно описать в рамках формальных систем. Но это скорее всего “романтический взгляд” на такую довольно сложную ситуацию. Более реалистичный взгляд предполагает необходимость глубокого понимания того, каким образом смысл выражается в формальных системах. Попытка установления окончательного ответа на вопрос о сущности математики была предпринята группой Бурбаки. Толчком к созданию группы послужили глубокие идеи Анри Пуанкаре, которые, тем не менее, представлялись членам группы довольно шаткими. Начиная с устоявшихся базовых принципов, они пытались на их основе вывести всю остальную “архитектуру математики”. “Подобное “абстрактное” описание математики непригодно ни для обучения, – считает академик В.И. Арнольд, – ни для каких-либо практических приложений” [9, с.555]. Однако со временем большинство членов группы Бурбаки отошло от формально-аксиоматических представлений о математике, поскольку математика настолько универсально содержательна, что неопределима через какие-либо методологические ограничения.

Методологическая значимость результатов Гёделя состоит в том, что он показал, как при принятии определенных мер предосторожности можно известные парадоксы превратить в неразрешимые предложения. Даже древние греки знали, что некоторые рассуждения, правильные с интуитивной точки зрения, могут иногда приводить к противоречиям, которые принято называть “логическими парадоксами”. Первую теорему Гёделя о неполноте можно проиллюстрировать на логической аналогии, которая принадлежит полубогатырскому поэту-прорицателю Эпимениду, жившему, по преданию, на Крите в VI веке до нашей эры, и известна под названием “парадокса критянина”, или парадокса лжеца. Это самое старое и самое известное из логических противоречий популяризуется в нескольких формулировках. Простейшая из них – это парадокс, связанный с высказыванием Эпименида: “Я лжец”. Более популярный вариант – это “парадокс критянина Эпименида”, которому приписывают высказывание, что все утверждения, сделанные

критянами, ложны: “Все критяне лжецы”. Вообще говоря, в устах критянина такое утверждение, с точки зрения здравого смысла, звучит довольно странно, потому что он обвиняет во лжи и самого себя. Как заметил математик и логик А.В. Гладкий, “здесь нет еще настоящего противоречия” [44, с.186]. Если считать, что лжец никогда не говорит правду, то, услышав от критянина, что все критяне лжецы, отсюда можно лишь заключить, что это высказывание ложно.

Потому как если предположить, что это высказывание истинно, то из этого истинного утверждения следует: “Эпименид лжец”. Но поскольку, по предположению, он высказал истинное утверждение, то следует признать, что “Эпименид не лжец”. Поэтому, мы приходим к противоречию. В современных версиях этого утверждения высказывание, описанное таким образом, ложно, причем описание построено так, чтобы оно относилось и к самому утверждению. Курт Гёдель с помощью понятия “доказательства” дал новую интерпретацию парадокса лжеца. Он предложил следующую формулировку: “Это утверждение не имеет доказательства”, вместо предложения: “Это утверждение ложно”. Если бы это утверждение было ложным, то оно было бы доказуемым, но это противоречило бы самому утверждению. Следовательно, оно должно быть истинным, но это утверждение не может быть доказуемым в силу самого утверждения, которое по предположению истинно. Гёделю удалось записать это утверждение в математических обозначениях, точнее свести свою конструкцию к некоторому утверждению теории чисел, и тем самым он смог доказать, что в математике существуют утверждения, которые истинны, но истинность их не может быть доказана, то есть это неразрешимые утверждения. Формулировка Гёделя может создать некоторую путаницу в ее правильном понимании, поскольку “доказательство” для многих является весьма приблизительным понятием. Философами науки и интерпретаторами теорем Гёделя упускается иногда следующее важное дополнение. Программа Гёделя, в действительности, была лишь частью длительных поисков математиков в надежде выяснить, что собой представляет “доказательство”.

Для математиков и логиков доказательства являются таковыми лишь внутри определенных жестких систем. В работе Гёделя такой жесткой системой, к которой относится слово “доказательство”, является фундаментальный труд английских логиков и философов Бертрانا Рассела и Альфреда Уайтхеда “Principia Mathematica”, написанный в 1910-1913 годах. Первая теорема Гёделя по существу утверждает, что какая бы непротиворечивая система аксиом ни использовалась, всегда найдутся вопросы, на которые математика не сможет найти ответ, – то есть полнота недостижима. Но есть еще дополнительная трудность в современных формальных системах. Вторая теорема Гёделя утверждает, что математики никогда не смогут быть уверены в том, что их выбор аксиом не приведет к противоречию, точнее непротиворечивость достаточно сильной теории никогда не может быть доказана внутри нее самой. В формальном варианте второй теоремы Гёделя о неполноте, которую было бы правильнее называть “теоремой о непротиворечивости”, утверждается, что если система, включающая

арифметику, непротиворечива, то доказательство этой непротиворечивости не может быть достигнуто в метаязыке, допускающем представление в арифметическом формализме. Но что в математике означает слово “непротиворечива”? Непротиворечивость системы аксиом означает, что не существует такого утверждения, которое в этой системе чисто логическим путем выводимо одновременно с отрицанием этого утверждения. “Противоречивые системы аксиом вредны и их не следует вводить, – поясняет математик и логик В.А. Успенский, – но дело в том, что противоречивость может не сразу выявиться” [162, с.25]. Математики, безусловно, хотели бы знать заранее, что противоречащие друг другу утверждения не появятся. Исчерпывающее объяснение по этой проблеме, скорее всего, невозможно, но некоторые косвенные, психологически убедительные признаки все же существуют.

Какой математикам прок в непротиворечивости самой по себе? Наибольшее впечатление производит следующий аргумент. Противоречивая система была бы бессмысленна, так как в ней была бы выводима любая формула. Это, вообще говоря, слишком общее утверждение, в духе классических формализаций логики. Противоречие ставит, прежде всего, под сомнение только те доказательства, которые непосредственно связаны с противоречивыми понятиями. Гёделевские определения непротиворечивости и доказательства признаны наиболее “естественными”, но если определить их иначе, то непротиворечивость системы может быть доказана в ней самой. Поэтому, если взглянуть на гёделевский подход исторически, то есть с точки зрения нефундаменталистского направления, то можно понять его ограниченность контекстом определенного подхода и рассматриваемых в то время задач. Можно сказать, что Гёдель изменил философскую проблему обоснования даже в том, что он по-своему уточнил ее, дав ей новую математическую формулировку. Фундаменталистское направление философии математики не признает этого важного математического факта. Провозгласив, что непротиворечивость должна “на самом деле” доказываться средствами математических теорий, Гёдель проложил путь к новому теоретическому направлению, по отношению к которому старое понимание непротиворечивости выглядело слишком наивным. Почему, несмотря на то, что непротиворечивость системы Цермело-Френкеля – одной из самых распространенных аксиоматик теории множеств до сих пор не доказана, математики довольно сдержанно реагируют на столь неопределенное положение, сложившееся в теории, претендующей быть “фундаментом” всей математики? Здесь возможны разные ответы, отличающиеся подходом к проблеме и их аргументированностью. Как считает крупный специалист по математической логике и теории множеств Ван Хао, “что касается современного состояния математики, то рассуждения о противоречивости систем являются довольно бесплодными – ни одна из формальных систем, широко используемых сегодня, не находится под очень серьезным подозрением оказаться противоречивой” [26, с.334]. Важность теоретико-множественных противоречий иногда сильно преувеличена.

Современные поиски доказательств непротиворечивости мотивируются по-разному и имеют более “серьезные” цели, чем просто избежание противоречий. Из второй теоремы Гёделя о неполноте следует, что доказательство непротиворечивости не может быть формализовано. Это говорит о необходимости использования для этих целей новых нефинитных методов, то есть опять появляется тема бесконечности. Теоремы Гёделя указывают нам на то, что ни одна система аксиом не может охватить всех истин. Американский математик Пол Коэн высказался однажды в том духе, что жизнь математиков была бы гораздо приятнее, не будь гильбертовская программа потрясена открытиями Гёделя. Правильная антитеза этому высказыванию, считает российский математик А.Н. Паршин, должна быть такой: “если бы не было теоремы Гёделя, то жизнь не только не была бы приятнее, ее просто не было бы” [128, с.94]. Теорема Гёделя показывает не просто ограниченность логических средств, она говорит о каком-то фундаментальном свойстве мышления, в том смысле, что если мы хотим что-то понять в мышлении человека, то это можно сделать не вопреки теореме Гёделя, а благодаря ей. В частности, существование альтернативных, отличных от гёделевского, подходов к понятию “доказательства” указывает на реальную сложность перевода неформального понятия на язык формальной математики. Однако вторая теорема Гёделя о неполноте – это не просто теорема в привычном смысле этого слова. По своему гносеологическому статусу она располагается на границе между неформальной и формальной математикой. Поэтому все еще остается открытым вопрос об эпистемологических выводах, следующих из теорем Гёделя.

Теорема Гёделя о неполноте одно из существенных препятствий для любой попытки полностью понять сущность и природу бесконечных множеств. “Одновременно, показывая, что высшие бесконечности отражаются в теории чисел, ибо позволяют нам доказывать недоказуемые без них утверждения, – замечает Пол Коэн, – теорема Гёделя чрезвычайно затрудняет отстаивание той точки зрения, что высшие бесконечности можно попросту отвергнуть” [88, с.171]. Углубленные занятия профессиональных математиков “продвинутой” областью знаний порождает иногда корыстную заинтересованность и нежелание рассматривать альтернативы. Программа Гёделя, наряду с теоремами о неполноте, включает в себя совершенно разные проблемы, решенные им благодаря тому, что у него не было традиционных идеалистических предрассудков, требующих исправления их введением в рассмотрение соответствующих реалистических понятий. Результаты Гёделя лучше всего могут быть поняты в терминах таких традиционно реалистических понятий, как арифметическая истинность и логическая общезначимость. С другой стороны, он обращался к таким понятиям конструктивистских программ, как формальные системы и интуиционистская логика. В конструктивистских подходах к основаниям математики, делающих акцент на использование убедительных определений и способов доказательств, ощущается идеалистическая традиция в математике. Программу Гёделя можно рассматривать как первое настоящее воплощение реалистических замыслов, с

помощью извлечения из них новых аксиом, и как наиболее содержательное представление о структуре математического мышления. Последнее можно сравнить с выводом математических законов из некоторой физической концепции, подобно тому, как английский физик Джеймс Максвелл выразил законы электромагнитного поля в виде системы четырёх дифференциальных уравнений с частными производными из “физической картины” Майкла Фарадея.

Отметим также, что противоборствующие взгляды “реалистической” и “идеалистической” философии Курт Гёдель трактовал скорее как дополнительные ветви одной науки, первая из которых сосредоточена на рассматриваемых объектах, а вторая – на процессах приобретения знаний об исследуемых объектах. Готфрид Лейбниц в свое время предполагал, что он нашел универсальное средство для ответов на многие вопросы. Однако именно в работах Гёделя была доказана неосуществимость лейбницева идеи универсальной формализации мышления. Даже величайшие мыслители древности, высказывавшие некоторые суждения об “абсолютных” математических понятиях, сопровождали их различными оговорками, понять которые можно было лишь на более высоком уровне познания. В противоположность девизу Лейбница: “Давайте посчитаем!”, современная математика, учитывая уровень ее строгости и обоснованности, склоняется к другой максиме: “Будем рассуждать!”. Это правило было и остается пока основным подходом в понимании сущности бесконечных множеств и связанных с ними проблем современных оснований математического знания. Теорема Гёделя о неполноте – это результат, плохо воспринимаемый психологически не только гуманитариями, но и многими математиками. Как сказал по этому поводу логик и философ математики Н.Н. Непейвода: “Она подрывает вульгарно понимаемую веру в познаваемость мира научными методами, являющуюся одной из догм “религии прогресса”: оказывается, что даже самая точная из наук не может познать даже простейшее множество объектов – натуральные числа” [123, с.364]. Возможно, поэтому результаты Курта Гёделя игнорировались математическим сообществом, как не имеющие отношения к ее реальным проблемам, до тех пор, пока Пол Коэн не поколебал эту уверенность своим результатом о неразрешимости континуум-гипотезы в традиционной системе теории множеств.

Работы Гёделя о неразрешимости внесли элемент сомнения и в вопрос о том, разрешима ли проблема Ферма, но истинных фанатиков великой теоремы Ферма это ничуть не разочаровало. Принципиальная трудность теоремы Ферма, а также других математических проблем, состоит в том, что рассматриваемое множество объектов, в данном случае натуральных чисел, бесконечно, поэтому проверить его все целиком нет даже принципиальной возможности. Однако математическое доказательство позволяет нам единым образом обзреть все это бесконечное множество и получить, если повезет, точный ответ. Проблема верно или неверно на множестве \mathbf{N} утверждение

$$\forall x \forall y \forall z \forall n ((x+1)^{n+3} + (y+1)^{n+3}) \neq (z+1)^{n+3},$$

стояла более 350 лет. Эта проблема известна под названием “великой теоремы Ферма”. Математики довольно часто хронометрируют свое время не столько конкретной датой получения решения той или иной проблемы, сколько временем поиска идеи этого решения. Поиск доказательства теоремы Ферма последний из примеров такого рода. На обычном математическом языке она формулируется следующим образом. Доказать, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, при $n > 2$ не имеет решений в положительных целых числах. Эта формулировка понятна любому школьнику. Примечательно то, что при $n = 2$ существует бесконечно много таких решений – это так называемые пифагоровы тройки (3, 4, 5), (5, 12, 13) и так далее. После основополагающих открытий Гёделя о неразрешимых предложениях, математики задавали и такой вопрос: Может быть проблема Ферма неразрешима в существующей системе математики? Пьер Ферма сумел сформулировать такой вопрос, который, несмотря на его естественность и простоту, не додумались задать даже древние греки, и в результате чего он стал автором труднейшей головоломки, решать которую пришлось другим поколениям математиков.

История современной математики усеяна многочисленными ложными заявлениями “ферматистов”, которым якобы удалось доказать эту теорему. Тем не менее, английскому математику из Пристонского университета Эндрю Уайлсу удалось в 1995 году получить завершающее доказательство “Великой теоремы Ферма” [190]. Заметим, что доказательство этой теоремы настолько объемно и сложно, что это отчасти мешало его окончательному признанию, поскольку найти ошибку в сложном и длинном рассуждении во много раз труднее, чем написать его. Пьер Ферма никогда не раскрывал своих доказательств, что вызывало у его коллег вполне естественное чувство разочарования. Когда Блез Паскаль настаивал на публикации некоторых работ Ферма, то он ответил: “Какая бы из моих работ ни считалась достойной опубликования, я вовсе не желаю, чтобы мое имя появилось в печати” [151, с.51]. Пьер Ферма сознательно жертвовал славой ради того, чтобы критики не досаждали ему своими придирами. Но история науки непредсказуема и в настоящее время все специалисты твердо убеждены в том, что Ферма не обладал доказательством этой теоремы и, более того, элементарными методами, доступными Ферма, ее нельзя было решить. Теорема Ферма – это частный случай задачи, связанной с диофантовыми уравнениями. Напомним, что диофантово уравнение, названное по имени греческого математика Диофанта Александрийского, жившего в III веке до нашей эры, – это алгебраическое уравнение вида $P(z_1, \dots, z_n) = 0$, где P – полином с целыми коэффициентами. Обычно интересуются решениями диофантовых уравнений в целых или целых неотрицательных числах.

Давид Гильберт не включил теорему Ферма в перечень двадцати трех важнейших проблем, стоящих перед математикой XX века. Правда, он включил в этот ряд проблем общую проблему разрешимости диофантовых уравнений: “Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли заданное диофантово уравнение в целых числах”. Это знаменитая 10-я проблема Гильберта. Невозможность

существования алгоритма, распознающего разрешимые диофантовы уравнения, то есть того, что требуемого в проблеме способа не существует, была окончательно установлена в 1970 году 22-летним аспирантом Ленинградского отделения Математического института Юрием Матиясевичем – представителем “четвертого поколения” конструктивного направления в логике и математике, возглавляемого в то время А.А. Марковым. По поводу основной теоремы Матиясевича о числах Фибоначчи, явившихся для него вспомогательным средством для установления весьма общих и очень важных закономерностей, логик Ф.П. Варпаховский и академик А.Н. Колмогоров сказали следующее: “По своей формулировке и методам доказательства она скорее напоминает хитроумную олимпиадную задачу” [27, с.39]. В основном содержании работы Ю.В. Матиясевича может самостоятельно разобраться даже талантливый школьник, поскольку оригинальная часть его работы посвящена доказательству теоремы, формулировка и методы доказательства которой вполне элементарны. Он воспользовался, как принято говорить, “редукциями” проблемы к более специальным задачам, а ключевой идеей было сведение всего к свойствам чисел Фибоначчи. Наряду с пониманием проблем современной математики, дополнительной составляющей успеха Матиясевича стало искусство нахождения неожиданных, пусть даже и вполне элементарных, путей решения специальных математических задач.

Заметим, что для диофантовых уравнений не выше второй степени общий метод, следуя которому можно было бы за конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в числах или нет, был найден. Однако диофантовы уравнения третьей степени никаким усилиям не поддавались, но в начале XX века Давид Гильберт и не подозревал, что соответствующего “алгоритма” не существует! Для конкретного диофантова уравнения задача о нахождении целочисленных решений и задача о нахождении решений в целых неотрицательных числах, то есть натуральных числах, – это, вообще говоря, разные задачи. “Однако если мы интересуемся сразу всеми уравнениями (как, например в 10-й проблеме Гильберта), то эти две задачи совпадают” [111, с.185]. В отличие от нахождения искомого общего метода, для доказательства несуществования некоего общего метода для решения определенного класса задач, требуется дать точное определение тому, что представляет собой этот общий метод и какими средствами он может быть реализован. Соответствующие определения были выработаны в новом направлении современной математики – теории алгоритмов. Именно десятая проблема Гильберта послужила одним из стимулов для создания этой теории. С доказательством теоремы Матиясевича в математической логике выделился законченный теоретико-числовой фрагмент, то есть “теория диофантовых множеств”, который достоин завершить любой курс элементарной теории чисел. Хотя в связи с неудачами в этом направлении изначально возникло подозрение, что общего метода, о котором говорится в проблеме Гильберта, вообще говоря, не существует. Преодолев трудности доказательства этой рабочей гипотезы, математикам на этот раз, так же как и четверть века спустя в

случае проблемы Ферма, удалось все же уйти с “проблемного поля теоремы Гёделя о неполноте”.

Как уже отмечалось выше, доказательство теоремы Гёделя о неполноте опирается на автореферентное, то есть описывающее само себя, математическое суждение, подобно тому, как парадокс Эпименида – это такого же рода суждение о языке. В русском языке слово “парадокс” означает суждение, противоречащее “общепринятым мнениям” или “логическим нормам”. Парадокс Эпименида можно видоизменить так, что получится настоящий парадокс. Еще в IV веке до нашей эры это сделал философ мегарской школы Эвбулид, предложивший изречение: “Предложение, которое я сейчас произношу, ложно”. Парадокс возникает, когда мы пытаемся определить, истинно или ложно это утверждение. Из истинности сформулированного предложения следует, что “оно ложно”, а из его ложности вытекает, что оно не ложно, то есть “оно истинно”. Вот это и есть подходящее утверждение для “парадокса лжеца”. Говорить о языке, используя для этого язык, вполне естественно. Гораздо труднее представить, как может говорить само о себе математическое суждение о числах. Курт Гёдель предположил, что “суждение теории чисел” могло бы быть “о суждении теории чисел”, возможно, даже и о себе самом, если бы с помощью чисел можно было бы обозначать суждения. Так возникла идея кода, именуемая “гёделевской нумерацией”, в котором символы и последовательности символов обозначаются числами. Идея нумерации позволила формулировать гёделевские неразрешимые предложения в терминах диофантовых уравнений, которые веками были вполне “благонамеренными” объектами чисто математических исследований. После того, как Гёдель изобрел свою кодирующую систему, парадокс Эпименида на формальном языке теории чисел, с учетом сделанного замечания об его трактовке доказательства, стал звучать приблизительно так: “Это суждение теории чисел не имеет доказательства в системе Рассела-Уайтхеда”.

Это предложение без формализации понятия “доказательства” может создать немалую путаницу. “В действительности, труды Гёделя, – считает американский ученый, специализирующийся на творческих возможностях человеческого мозга, Даглас Хофштадтер, – были лишь частью долгих поисков, предпринятых математиками в надежде выяснить, что же такое доказательства” [168, с.19]. В чем же тогда состоит эффект открытия Гёделя? Эффект в том, что модифицированное высказывание Эпименида создает парадокс, поскольку оно не является ни истинным, ни ложным, а высказывание Гёделя не доказуемо, хотя оно и истинно в системе “Principia Mathematica”. В частности, это означает, что эта система неполна, так как существуют истинные суждения теории чисел, не доказуемые методами доказательства самой системы теорем. Согласно одной из трактовок второй теоремы Гёделя о неполноте непротиворечивость математической системы может быть доказана только методами, более “сильными”, чем сама эта система, поскольку ее методы доказательства оказываются иногда слишком “слабыми”. Это достаточно традиционное понимание второй теоремы Гёделя не вполне точное, так как в этом случае упускается из вида дуализм интуитивного и формального в

программе Гёделя. Как вообще философы науки понимают дуализм? Это “мысленное” разделение мира на категории. Соответствующие методологические проблемы обусловлены тем, что разбиение мира на категории происходит гораздо глубже самого высокого уровня мышления: дуализм настолько же процесс восприятия мира, как и его понимания. Это означает, что человеческое восприятие по своей природе дуалистично.

Современные аксиоматические теории описывают не все те средства, которые используются в рассуждениях, поэтому теорема Гёделя о непротиворечивости не дает, вообще говоря, оснований предполагать, что для доказательства непротиворечивости некоторой аксиоматизированной математической теории нужны более сильные средства, вроде каких-то дополнительных постулатов, чем те, что уже фактически используются при построении этой теории. Дело в том, что аксиоматические теории используют интуитивную идею натурального числа, а также различные правила “следований”, “отождествлений” и “различений”. Но эти дополнительные средства по существу содержатся в любой аксиоматической теории, хотя и не описываются ими, поэтому нет оснований считать какие-то из них “более сильными” в указанном смысле. Вторая теорема Гёделя, с точки зрения известного логика А.С. Есенина-Вольпина, вовсе не разрушает надежды на получение таких доказательств, которые основаны на более глубоком рассмотрении этих средств. То есть ситуация с результатами Гёделя намного тоньше и сложнее, чем она представляется математикам и философам науки. Не случайно Н.Н. Непейвода призывал “не верить никаким философским комментариям к теореме Гёделя”, поскольку практически все популярные философские комментарии к этой теореме неверны. Основная проблема состоит в том, что в программе Гёделя используется фундаментальная двойственность теории чисел в логике: когда она аксиоматизирована, она становится “объектом” изучения, а с другой стороны, используемая неформально, она является “орудием”, при помощи которого могут изучаться формальные системы. Поэтому в “окрестностях теоремы Гёделя” нет простых и однозначных истолкований.

Математика в своих практических применениях многолика, поэтому, вполне можно предположить, что и философское обновление придет отчасти и через современную математику. В качестве примера противоположного суждения сошлемся на мнение Пола Коэна о том, “что любое техническое достижение и в будущем не прольет света на основные философские проблемы” [88, с.171]. Фундаментальная недостаточность всех формальных систем, считает он, имеет более важные последствия, чем независимость частных утверждений вроде знаменитой гипотезы континуума. Тем не менее, попытки увязать математические и философские концепции имеют под собой достаточное основание для такого сопоставления в виде рациональной природы математики и философии. Несколько схематизируя, можно выделить следующие главные направления в математизации знаний. Во-первых, эмпирико-математическое направление, в котором математика используется как новый язык, позволяющий осмыслить и компактно представить новые

экспериментальные данные. Во-вторых, теоретико-математическое моделирование, ориентированное на решение семейства задач разных областей, близких по формальной постановке, выступающее в роли метафор, которые облегчают понимание наблюдаемых явлений. Примерами подобных направлений могут служить, соответственно, метод максимального правдоподобия Рональда Фишера в математической статистике и теория катастроф Рене Тома, в основе которой лежат математические теории бифуркаций и особенностей. Заметим, что до XVI века законы вероятности и математической статистики определялись, исходя из интуиции и опыта игроков, но Блез Паскаль затеял переписку с Пьером Ферма с целью открыть математические правила, которые более точно описывали бы “законы случая”. Даже три столетия спустя Бертран Рассел возмущался теми, кто осмеливался говорить о законах случая, аргументируя это тем, что случай – это “антитеза всякому закону”. Задачи теории вероятностей иногда кажутся парадоксальными, потому что математическое решение нередко не согласуется с интуицией и противоречит “здравому смыслу” выводов и утверждений.

Заметим, что теория катастроф, изобретенная в шестидесятые годы XX века Рене Томом, стала одной из наиболее широко разрекламированных метатеорий. Бурный триумф теории катастроф можно сравнить со временем возникновения кибернетики, у которой теория катастроф заимствовала некоторые приемы саморекламы с элементами своеобразной философии теории катастроф. Разработанная вначале как чисто математический формализм, она затем стала навязываться как теория, способная помочь проникнуть в суть широкого спектра явлений с характерно дискретным поведением. Термин “катастрофы” Рене Том ввел для передачи интуитивных представлений, связанных с математическими описаниями таких явлений, как разрывы, скачки, поверхности раздела между однородными фазами и тому подобное. Роль теории катастроф в этих представлениях состоит в том, что наличие точек, отличных от плавного течения процессов, не является исключением. Поэтому если в математической теории используются гладкие отображения, то должны встречаться и их особенности. Одним из источников теории катастроф является теория особенностей гладких отображений, основы которой заложил американский математик Хасслер Уитни в работе “Об отображении плоскости на плоскость”. Теория особенностей – это по существу обобщение исследования функций на максимум и минимум, в котором вместо функций рассматриваются отображения n -мерного пространства на m -мерное пространство. Принципиальная применимость теории катастроф к изучению явлений и процессов в различных областях науки обусловлена использованием информации об особенностях общего положения, не зависящих от конкретного знания исследуемого объекта. С точки зрения современных тенденций развития математики существенным недостатком теории катастроф является отсутствие алгоритмических рекомендаций, хотя она и содержит элементы диагностики.

Каждая научная теория имеет некоторый набор фундаментальных постулатов, с помощью которых пытается объяснить феномены и явления, которые остались необъясняемыми. Потому, чтобы иметь достаточные

основания для веры в истинность теории без модификации ее основополагающего формализма, эта теория должна содержать в себе некоторые преимущества, содержащие признаки истинности, выделяющие ее среди других ее аналогов. В таком контексте область законности квантовой механики и теории множеств – это нерешенные проблемы современной философии науки. Ортодоксальная точка зрения на квантовую механику, известная как “копенгагенская интерпретация”, базируется на следующем утверждении: “то, что мы наблюдаем, – это все, что мы можем знать”. На идею дополнительности в квантовой физике Нильса Бора натолкнули размышления о психических явлениях. Поэтому при всестороннем анализе квантовой механики философы науки обращают внимание на психологические аспекты методологических интенций Бора и Гейзенберга. Современная наука, в терминах теории катастроф, подняла познавательную способность людей до точек разрыва. Если в XIX веке любой хорошо образованный человек мог понять современную физику, то уже в XX веке это стало доступным только специалистам. И это при том, что научная культура, которая когда-то была гораздо меньше и поэтому была подвержена более быстрому изменению, теперь стала интеллектуально и социально бюрократичной с соответствующей ей инертностью. Успех науки возникает большей частью из дуализма интеллектуальных импульсов и консерватизма высоких стандартов эффективности. В этом отношении квантовая механика и теория относительности получили такое признание не только потому, что дали новые интеллектуальные импульсы, но и потому, что были эффективны в предсказании результатов экспериментов. Для понимания гносеологической природы дуалистичности современной науки можно выделить более точные квалификации типа дополнительности, но для вычленения смысла дополнительности правильнее было бы исходить из физики, где этот принцип был сформулирован. Физик Макс Борн, давший вероятностную интерпретацию волновой функции в квантовой механике, считает, что дополнительность, так же как и дуализм, применяется к различным вещам: к парам понятий “корпускула – волна”, “координата – импульс”, к “аппаратам для их измерения” и, наконец, к “методам логики и философии” [46, с.358]. Принцип дополнительности носит существенно эпистемологический характер, точнее характер физического описания и определенного логического требования к этому описанию.

Логика квантовой механики обязана своим появлением, прежде всего, принципу неопределенности Гейзенберга. Когда мы говорим, что в данное время электрон имеет точную координату x и в то же время точное значение импульса p , то, в соответствии с этим принципом, это ни истинное и ни ложное, а бессмысленное утверждение, поскольку оба эти понятия в описанной ситуации не схватываются в своем точном значении. В связи с этим и возникла задача осмысления сложных высказываний. Согласно “копенгагенской интерпретации” квантовой механики в зависимости от способа наблюдения материя может проявляться в виде волн или частиц и, кроме того, между причиной и следствием больше не существует, как было принято считать ранее,

тесной связи. В феврале 1927 года Вернер Гейзенберг, один из первых создателей и наиболее активных сторонников “копенгагенской интерпретации”, двадцатипятилетний аспирант Нильса Бора, сформулировал свое наиболее известное открытие в физике – соотношение неопределенностей, или принцип неопределенности, которое является ключевым положением “копенгагенской интерпретации”. Но интерпретация – это всего лишь интерпретация, поэтому этот принцип можно рассматривать как результат возможного логического объяснения характерного свойства каждого квантового эксперимента. Гораздо важнее то, что впервые один из ведущих физиков провозгласил, что существуют пределы научного познания и неопределенность – это не вина экспериментатора. Математическое соотношение неопределенностей, дающее “нижнюю границу” для произведения неточностей положения и момента импульса в квантовой механике, проясняет задачу соотношения неопределенностей измеряемых величин, лишь тогда, когда имеются количественные данные о результатах наблюдений и опытов. Из него следует, что если точно установлена одна характеристика, то нельзя определить другую, дополнительную первой.

Принцип дополненности как способ описания реальности, в отличие от принципа неопределенности, оперирует понятием возможностей, а не количественными данными. Немецкий физик Вернер Гейзенберг открыл принцип неопределенности за четыре года до того, как австрийский логик Курт Гёдель опубликовал свою работу о неразрешимости. Принцип неопределенности Гейзенберга и теорема Гёделя о неполноте породили в мире физики, математики и философии науки невидимые “ударные волны”, повлиявшие на методологические установки всей философии науки. “Основной принцип квантовой теории состоит в том, что за этим явлением не стоит ничего другого, он ни к чему не сводим, он первичен” [130, с.149]. Подобно тому, как Курт Гёдель открыл предел, до которого математики могут доказывать свои теоремы, Вернер Гейзенберг обнаружил, что существует предел, до которого физики в принципе могут производить измерения свойств. Хотя принцип неопределенности имеет далеко идущие следствия, даже по прошествии более чем полувека отдельные философы так и не согласились с ними, и эти следствия остаются предметом обсуждений и споров. Многие математики, физики и философы приняли новую парадигму о существовании пределов постижения мира, однако если эти границы истинные, то наука будет достаточно полной и в рамках этих границ. Их “примеру смирения” последовали и другие науки, осознавая при этом, что хотя ограничения и пределы возможностей логики не влияют на ход событий в “реальном” мире, они могут определять то, что претендует на статус “обоснованных интерпретаций” этих событий. Вообще говоря, логичность как условие эффективности чаще всего проявляется лишь в узко специализированных сферах человеческой деятельности.

Физик не обязан быть непротиворечивым, а должен эффективно описывать природу на определенных уровнях. Поэтому, несмотря на то, что теоремы

Гёделя о неполноте подрывают само понятие “полной теории природы”, у способности науки отвечать на вопросы, на которые она может ответить, потенциально границ нет. Можно попытаться, предлагает математик А.Н. Паршин, перенести на p -адический случай значительную часть математической физики, известной в обычном евклидовом или декартовом пространстве. В таком пространстве, содержащем формальную математическую теорию, имеются возможности, считает он, как для “механического” движения, так и для “волновых” процессов. Естественный язык подбрасывает нам аналогии между движением предметов физического мира и движением мысли. Вывод, к которому приходит А.Н. Паршин, философски анализируя различные стороны теоремы Гёделя, состоит в том, что “можно допустить существование некоего умопостигаемого пространства, в котором логические высказывания являются “вещами” или “предметами”, но при этом они не исчерпывают его ни в коей мере, а находятся в нем примерно так, как рациональные числа помещаются среди иррациональных” [128, с.103]. Интуиция тогда была бы связана с движением по этому пространству. Не случайно, даже в чисто вербальном, то есть словесном, плане имеется соответствие между иррациональными числами и наличием иррациональной или интуитивной составляющей человеческого познания. С точки зрения Курта Гёделя, существует аналогия между физическим и математическим познанием, между чувственным восприятием физических объектов и интуицией математических понятий.

Математическая интуиция, утверждает группа французских математиков, выступающая под коллективным псевдонимом Н. Бурбаки, возможно, представляет собой всего лишь некоторое знание поведения математических объектов. Даже для математических понятий, которые кажутся воспринимаемыми чувственной интуицией, соответствующие им объекты могут значительно отличаться от того, что мы о них думаем. Поэтому запрещение различных видов математической интуиции в пользу какого-либо одного метода, например, интуиции натурального числа, можно даже считать искусственными ограничениями математического творчества. Математическая интуиция может применяться к математическим понятиям и структурам довольно высокой степени абстрактности, хотя никакой ее вид не является, вообще говоря, абсолютно непогрешимым. В действительности, один из лидеров группы Бурбаки математик Жан Дьедонне считал, что интуиция математика в гораздо большей степени относится к длительной привычке, чем непосредственно к нашим чувствам. Он, к примеру, высказывал сомнение в том, что кто-нибудь обладает “серьезной” интуицией натурального числа, большего, чем десять, имея в виду непосредственное психологическое восприятие. Неограниченно продолжаемый натуральный ряд чисел или бесконечная прямая могут служить характерными примерами хорошо известных абстрактных математических объектов, не имеющих непосредственного экспериментального обоснования, о которых наиболее часто говорят в контексте различия дискретного и непрерывного. Можно предположить, что именно принцип дополнительности Бора развивает гипотезу

Демокрита о связи непрерывного и дискретного и “дополняет” тезис Гегеля о “единстве и борьбе противоположностей”.

В современной математике происходит любопытное явление переноса чувственной интуиции на совершенно абстрактные объекты. Убедительным примером является распространение геометрического языка на бесконечномерные банаховы и гильбертовы функциональные пространства. Векторные пространства функций в большинстве случаев бесконечномерны, поэтому возможность целенаправленно применять к ним первоначально развитую конечномерную математическую интуицию оказалась важнейшей методологической идеей функционального анализа. Именно этому в XX веке учили математиков Давид Гильберт и Стефан Банах. “Методы классической математики, – отмечал Банах, – очень тесно и гармонично объединились в этой теории с современными методами” [15, с.9]. Современный математический язык традиционно связан с переносом и “приручением” интуиции из конечного в бесконечное. Многие философы отталкивались в своих построениях от кантовских антиномий конечного и бесконечного. Плодотворность современной математики основана на взаимодействии двух противоположных тенденций: изучении конечного, обращаясь к бесконечному, и изучении бесконечного, аппроксимируя его конечным, а с точки зрения Нильса Бора, противоположности не противоположны, поскольку они дополняют друг друга.

Различие естественных источников формирования математических традиций исследования через неоднородность эпистемологического статуса философско-математического познания проявляется в особенностях синтеза современных программ обоснования математики. Когда в математическом доказательстве присутствует убедительность и обозримость, то это может стать решающим аргументом в пользу признания такого доказательства. Формалисты полагают, что обозримые доказательства можно формализовать, хотя интуиционисты считают, что конструктивные математические доказательства нельзя заменить формальными системами. По существу это старый спор о реальности математических абстракций, связанный с различным понимании интуитивной основы математического мышления, а именно, являются ли эти абстракции изобретением человеческого ума или их предопределено структурой мира, в котором мы живем. Роль абстракций в познании состоит в том, что они идеально ограничивают реальные объекты и тем самым позволяют определять их с наиболее возможной степенью точности. Слово “абстракция” в научном контексте не несет на себе никаких негативных признаков. Это не математический термин, а философское понятие, хотя оно широко используется в математике, физике и других науках. Абстракция – это форма познания, основанная на мысленном выделении наиболее существенных свойств и связей изучаемого объекта. Поэтому необходимо разделить методологическое и философское понимание математического реализма.

В математике методологический реализм, в частности, означает, что в качестве непосредственно истинных предложений могут приниматься не только утверждения о конкретных математических объектах, но и об

абстрактных сущностях, например, о множестве действительных чисел или о пространстве измеримых функций. Согласно номиналистскому подходу к обоснованию математики, подлинной надежностью в математике обладают только высказывания о таких объектах как натуральные числа и операции с ними. Новая обосновательная методология строится через критику строго номиналистического построения математики, через критику финитизма и через оправдание некоторой части трансфинитной математики, связанной с непосредственной опорой на онтологическую истинность. Такого рода идеи были высказаны Куртом Гёделем, критиковавшим те программы обоснования математики, которые на основе номиналистски интерпретируемых понятий пытаются вывести всю систему принципов. Ограниченность такого подхода была продемонстрирована в конце 90-х годов Ю.П. Петровым, показавшем, “что помимо известных до этого двух классов математических и технических задач (класса корректных и класса некорректных задач) существует третий класс – класс задач, изменяющих свою корректность в ходе эквивалентных преобразований, использованных при решении” [141, с.216]. Неожиданная встреча с промежуточными задачами третьего класса может привести к опасным ошибкам в расчетах. Философская компаративистика в такой нестандартной ситуации играет роль “третьего”, точнее той методологической основы, опираясь на которую участники философско-математического диалога выстраивают свои позиции, пытаясь быть понятными друг другу.

3.3. Современные методологические установки и гильбертовские идеализации

В математическом доказательстве методологическая сопряженность целого и части связана с убедительностью и обозримостью. “Если убедительность – это в известной мере осуществимость доказательства как целого, завершеного, но в котором особо выделены исходный и заключающий его пункты, – утверждает философ науки А.Н. Кочергин, – то обозримость – это осуществимость доказательства в каждом пункте сцепления доказательства без того, чтобы выявить противоречия в целостном, нарушить осуществимость доказательства как целого” [87, с.75]. Двойственность этих понятий проявляется в том, что убедительность, в определенном смысле, отражает обозримость целого, а обозримость можно интерпретировать как убедительность частей оставляющих доказательство. Формализованность доказательства – это отчасти необходимая упрощающая процедура, делающая математическое доказательство более универсальным, делая его доступным для задания компьютеру. Заметим, что квантовые компьютеры могут решать задачи существенно быстрее, чем классические. Хотя квантовых компьютеров пока нет и до сих пор неясно, когда появятся их практически полезные конструкции, американский специалист по квантовой теории Дэвид Дойч формализовал вопрос квантовых вычислений в рамках современной теории вычислений. Это чрезвычайно актуальный сейчас предмет в математике и физике, так как

процессы передачи и переработки информации происходят по физическим законам, и установлены принципиальные ограничения на допустимую сложность поддающихся решению задач, так называемой полиномиальной сложности.

Чувственные интуиции, в том числе и математического знания, идентифицируются, прежде всего, как источник познания случайных истин, а концепции, вообще говоря, в своем большинстве ассоциируются по необходимости с неизменными истинами. Кант утверждал, что мы не только не знаем, но и не можем знать природы, и располагаем лишь чувственными восприятиями. Ссылаясь на Канта, можно утверждать, что мы проецируем на внешний мир врожденную концептуальную картину. Тех философов, которые разделяют взгляд на математику как на творение человека, видя ее источник в силе человеческого разума, можно, по существу, называть кантианцами. Творческая деятельность разума создает в современной математике новое фундаментальное знание, интересное и полезное для него. Требование же некоторой современной версии объяснительной модели для объективного существования математической истины во многом связано с возможностью выбора из множества всевозможных метафор в разговоре о познании.

В начале XX века французский математик Жак Адамар говорил о том, что цель математической строгости состоит в том, чтобы санкционировать и узаконить завоевания интуиции. Анализируя различные типы аналитических умов, Адамар пришел к следующему выводу относительно дополнительного способа их описания: “Если у некоторых умов, исключительно интуитивных, идеи могут рождаться и комбинироваться в еще более глубоких слоях бессознательного, ... то возможно, что даже очень важные звенья дедукции могут оставаться неизвестными даже самому автору” [1, с.91]. Прогресс математики неизменно стимулировался великими интуитивными озарениями, получавшими впоследствии с помощью поправок, доводящих доказательство до приемлемого для своего времени уровня строгости, должное обоснование. Ничто не может быть данным раз и навсегда. Греческий идеал математического знания как свода абсолютно надежных и неопровержимых истин довлел над мышлением математиков более двух тысячелетий. Возникающие контрпримеры “подрывали” старые доказательства, и они пересматривались, а новые варианты могли опять ошибочно считаться окончательными. В современной теории творческого мышления обосновано, что в процессе решения трудных творческих задач “проход через ошибки” неизбежен. Двойственный характер ошибки проявляется, когда необходимо отличить формальное запоминание от осознанного понимания в практике математического образования: качество ошибок несравнимо. Новое понимание этой проблемы возникло, когда два математика из Иллинойского университета Кеннет Аппель и Вольфганг Хакен предложили новый метод для решения “проблемы четырех красок”, состоящий в доказательстве того, что для раскраски любой мыслимой карты, при условии, чтобы никакие две смежные области, то есть имеющие общую границу, не оказались окрашенными в один и тот же цвет, достаточно четырех красок.

Эта проблема оставалась нерешенной почти 125 лет. Хотя для некоторого конечного числа областей эта гипотеза Фрэнсиса Гатри была доказана, продвижение к бесконечно многим областям было безуспешным, пока в 1976 году не решили эту проблему с помощью компьютера, перевернув тем самым традиционные представления о математическом доказательстве. В отличие от традиционного рецензирования программа Аппеля-Хакена была введена в “независимый” компьютер, чтобы убедиться, что результат останется тем же, а затем решение Аппеля и Хакена было опубликовано на страницах журнала “Illinois Journal of Mathematics” [182]. Но такое нестандартное рецензирование вызвало резкие возражения некоторых ведущих математиков, считавших компьютерную проверку неадекватной, поскольку она не гарантирует безотказной работы в “недрах” компьютера и соответствующих сбоях в ее логике. Кроме того, в работе каждого современного компьютера из-за его двойственной структуры, а именно, слабых мест в программном обеспечении и электронном оборудовании, могут быть незамеченные ошибки. Тем не менее, использование “кремниевой логики” и “генетических алгоритмов” меняют практику математического доказательства. Курт Гёдель никогда не сомневался в том, что возможна часть математики, изучающая наши собственные “конструкции” или выборы. Он настаивал на том, что математика имеет дело со специфическими объектами, существующими во внечувственном мире, до и независимо от математических теорий. Допущение таких объектов, согласно Гёделю, столь законно, как и допущение физических явлений, то есть имеются основания верить в их существование. Исходные математические идеализации, отражающие некоторые абстрактные свойства реальности, отличаются в целом от физических абстракций, прежде всего тем, что они относятся не к миру опыта, отражающего многообразие предметов в пространстве и времени, а к миру отношений, значимых для деятельности человека. Интерес Гёделя к этой тематике следует иметь в виду при оценке его “платонизма”. Однако у платонизма Гёделя гораздо больше общего не с позицией Платона, а с концепцией Канта, поскольку математическая интуиция для него связана не с созерцанием математического объекта, а с его конструированием.

В своей фундаментальной работе “Критика чистого разума” (1781) Иммануил Кант утверждает, что все аксиомы и теоремы математики истинны. Откуда такая лестная для математиков уверенность, если даже опыт, вообще говоря, не делает математические утверждения истинными? Ответ Канта сводится к тому, что наш разум сам по себе владеет формами пространства и времени. Разум формирует восприятия, считает он, и эти восприятия являются интуитивными представлениями о пространстве и времени. Курт Гёдель допускал, что наряду со способностью к чувственному восприятию человек обладает способностью внечувственного восприятия, благодаря которому он постигает мир математических объектов. В работе “О мире чувственном и мире сверхчувственном”, известной также под названием “Диссертация 1770 года”, Кант установил субъективность представления об этих двух категориях. Согласно Канту, пространство есть интуитивная форма внешнего восприятия, а время – форма внутреннего восприятия, поэтому они не имеют ничего общего

друг с другом, поскольку возникают из разных источников. В точки зрения общей теории относительности пространство и время – это динамические величины, то есть их фундаментальная двойственность состоит в том, что когда тело движется или действует сила, то это влияет на кривизну пространства и времени, а структура пространство-время, в свою очередь, влияет на то, как движутся тела и действуют силы. “К пространству-времени, – пишет известный математик и физик Ю.И. Манин, – нас привязывает масса, она мешает нам лететь со световой скоростью, когда время останавливается, а пространство теряет смысл. В мире света нет ни точек, ни мгновений; сотканное из света существа жили бы “нигде” и “никогда”, лишь поэзия и математика способны говорить о таких вещах содержательно” [108, с.54]. Очевидно, что никакое эмпирическое исследование не сможет доказать тождество пространственно-временных сущностей, имеющих различное положение в пространстве и времени.

С другой стороны, интуитивно преодолеть границы различия бесконечного и конечного или различия “божественного” и “человеческого” тоже довольно проблематично. При обдумывании взаимоотношений между нашими моделями классического мира и квантово-механическими принципами описания материи, самое важное состоит в том, что мы плохо понимаем эти взаимоотношения. Основные эпистемологические принципы описаний плохо взаимно согласованы. У Гёделя присутствует “кантовский мотив” о существовании некоторых познавательных структур, оформляющих наш физический опыт, которые, взятые в “чистом виде”, могут стать источником математического опыта. По Канту, физическое – это пространственно-временное, а метафизическое – тайна, находящаяся за пределами чувств, не имеющая ни пространственных, ни временных характеристик. Пространство и время Иммануил Кант связывает с формальными принципами чувственного мира, тогда как рассудок, по его мнению, выполняет логическую функцию, поскольку он способен мыслить, например, предмет чувственного созерцания. Правомерность выделения “внеприродных” компонент научного знания и попыток отделения человеческого от природного можно объяснить тем, что природе логика не свойственна, а математические абстракции в ней отсутствуют. Кант определяет отличие мира природного от мира человеческого с помощью различия между миром естественной необходимости и человеческой свободы. Даже если в природе не существует математических объектов, физическую реальность можно снабдить значительной частью математических структур. Тогда математические утверждения типа “континуум-гипотезы” оказываются уже утверждениями о свойствах пространства и времени.

Идеи Канта о физическом пространстве и времени хорошо согласовывались с господствовавшей в кантовские времена ньютоновской физикой. Он признавал законы Ньютона и следствия из них самоочевидными. Обладая врожденными интуитивными представлениями о пространстве и времени, наш разум в соответствии с этим организует чувственные восприятия. Недостатки формалистского понимания математики вытекают из

позитивистской теории познания, отрицающей особый статус категориальных представлений и не учитывающей дополнительный характер естественнонаучных и философских представлений о мире. Философы математики не раз отмечали, что из того, что математика применяется на практике, иногда делается необоснованный вывод, что математическая теория в своей истинности проверяется или обосновывается практикой. По существу происходит смешение таких понятий, как опыт и практика, истинность и содержательность. Даже если математическая теория, стимулируемая практикой, содержательна, то отсюда не следует, что она проверяется на опыте, подобно эмпирическим теориям, и что она истинна. Пространственные восприятия соотносятся с постулатами евклидовой геометрии, поскольку этого требует наш разум. Однако если принять гипотезу, что точка пространства-времени является идеализацией классического образа “мельчайшего события”, то мы неизбежно, в соответствии с гносеологическим пониманием концепции дополнительности, придем к необходимости рассматривать и другие геометрические модели по мере накопления знаний о характеристиках таких событий. Очевидно, что любая аналогия остается “чисто словесной” до тех пор, пока не сформулированы конкретные утверждения. Тем не менее, фундаментальная проблема сознания: “откуда мы знаем то, что мы знаем”, пока остается неразрешимой.

Современная наука пока не в состоянии дать полностью детализированную теорию сознания. Ряд важнейших аспектов этой деятельности человека, например, воля и подсознание, не поддаются классическому компьютерному моделированию, поэтому можно предположить, что сознание является невычислимым процессом. Тем не менее, было бы полезно попытаться оценить границы математического формализма для описания сознания, поскольку любые разговоры о “теории всего” будут оставаться неполными, пока физика вместе с математикой отказывается рассматривать сознание. Четкая математическая формулировка позволяет иногда ставить вопросы, обращенные к глубинам сознания. Исследование состояний сознания позволяет сделать вывод о том, что хотя сознание и переживания человека опосредованы мозгом, они, с одной стороны, не порождаются им, а с другой стороны, не являются абсолютно независимыми от него. Во введении к трансцендентальной логике “Критики чистого разума” Иммануил Кант говорит о двойственности чувственности и рассудка: “Без чувственности ни один предмет не был бы нам дан, а без рассудка ни один нельзя было бы мыслить. Мысли без содержания пусты, созерцания без понятий слепы” [72, с.70]. Эти две способности не могут выполнять функции друг друга, поскольку рассудок не может созерцать, а чувства не могут мыслить. Только из их соединения, считает Кант, может возникнуть знание. Самый загадочный аспект связи между психикой и мозгом – это сознание, которое может принимать разнообразные формы – от ощущений боли до самосознания. Долгое время проблема сознания воспринималась либо как чисто философская, либо как слишком сложная для “податливого” экспериментального изучения. В математике “плохая” постановка задачи чаще всего означает, что для ее решения необходимо ввести

дополнительное условие. Для психологов двоичность восприятия окружающего нас мира обусловлена чисто физиологическими причинами, прежде всего тем, что мозг человек разделен на два полушария, каждое из которых выполняет свою функцию, и тем, что у нас два глаза, два уха, две ноздри, две руки и две ноги. Поэтому концепция дополнительности обусловлена физиологически-функциональной асимметрией полушарий головного мозга и асимметрией сознания человека. Этой асимметрией опосредовано то, что мы в нашей картине мира пользуемся именно бинарными оппозициями.

Например, с точки зрения Георга Кантора, понятие множества является не только порождением мысли, но и отражением объективной реальности, воспринимаемой сознанием. Понимание дополнительной природы сознания и его физического воплощения имеет длительную историю развития взглядов на человеческое познание, связанных с психофизическими параллелизмами. В этом же ряду и отношения между анализом и знанием, эмоциями и ощущениями, между аффективными и когнитивными аспектами нашего существования. Мозг человека состоит из двух полушарий, левого и правого, которые перекрестно связаны с правой и левой половинами тела. Левое полушарие связано с логическим и алгоритмическим мышлением, работая лишь во время бодрствования. Правое полушарие отвечает за чувственную и образную сферу нашего сознания, функционируя постоянно. В настоящее время известно, что у правшей левое полушарие обрабатывает информацию подобно цифровой вычислительной машине, тогда как правое полушарие функционирует скорее по принципу оптических и голографических систем обработки данных. Большинство когнитивных психологов предполагает, что производимые мозгом вычисления носят во многом бессознательный характер, а то, что мы осознаем – это лишь результат этих вычислений. Как показывает опыт, если бессознательный процесс приводит к значительным позитивным результатам, то они каким-то образом “распознаются” сознанием, хотя сам процесс, приведший к результату, может остаться скрытым от сознания. Обсуждая функциональную асимметрию, следует иметь в виду, что когда говорят о некоторых свойствах, присущих тому или иному полушарию, это не означает, что данное свойство присуще ему “абсолютно”, то есть они функционируют раздельно и вместе одновременно.

Это напоминает “квантовое” взаимодействие. В рамках квантовой физики, с точки зрения принципа дополнительности Бора, часто невозможно точное определение физической величины без потери информации о некоторой “дополнительной” величине. В более общем философском смысле Нильс Бор считал, что это явление можно перенести и на проблему изучения сознания, хотя в отличие от физики для нее нет развитого математического аппарата. Схожесть методологического “заимствования” в том, что изучение процесса мышления принципиально невозможно без неизбежного вмешательства в его деятельность и, соответственно, его нарушения. Если это связано с участием “квантовых объектов” в работе мозга, то все равно неясно, сколько в этом высказывании физического, а сколько философского. Выводы, полученные

М.Б. Менским, занимавшегося новыми приложениями квантовой механики и проблемой сознания, соответствуют характерной квантовой черте мышления: “слишком детальное осознание процесса мышления делает его неэффективным” [114, с.220]. Возможны различные “спекуляции” по поводу оптимального взаимодействия между осознанным и неосознанным у людей, хорошо решающих математические проблемы. Однако неэффективность работы мозга большинства людей при решении абстрактных задач позволяет сделать вывод о том, что соответствующая оптимизация человеческого интеллекта еще не достигнута.

При восприятии каких-то явлений внешнего мира было обнаружено явление, выражающее противоположность между последовательными и параллельными действиями. Например, восприятие грамматической структуры в языке происходит во времени последовательно и лучше воспринимается левым полушарием, а схватывание смысла и интонации фразы, то есть ее целостного образа, раскрывающегося во времени, но воспринимаемого иногда мгновенно, более характерно для правого полушария. В частности, левое полушарие содержит не только генетически заданные механизмы усвоения естественного языка, но и логические, аналитические способы видения мира или более общо, то, что мы называем “рацио”, а правое полушарие ведаёт интуицией, образами и целостным синтетическим восприятием окружающего мира. Другими словами, если правое полушарие воспринимает внешний мир со всеми его красками и звуками, то левое полушарие воплощает это восприятие в грамматические и логические формы. В целом асимметрия является преимуществом при попытке выполнить два разных действия одновременно. Если какие-то действия могут выполняться разными полушариями, то в этом случае соответствующие помехи снижаются. С другой стороны, труднее координировать поведение каждого полушария при выполнении общего сложного задания. Вполне обоснованной выглядит гипотеза о том, что свойства, характерные для левой и правой стороны человека, являются дополнительными друг к другу. Дополнительность в том и состоит, что мы неизбежно должны использовать два принципиально различных, несопоставимых и несоизмеримых языка описания. Сочетание этих двух компонент может пролить свет и на “природу и типологию математических интеллектов”, сочетающих математический образ с качественными рассуждениями. Отметим также, что левша не является зеркальным отображением правши, поскольку на самом деле это совсем другая неоднозначная ситуация.

Известные психологи Т.А. Доброхотова и Н.Н. Брагина, изучавшие проявления форм асимметрии человека в психической жизни, пришли к выводу, что формирование различных психических процессов можно интерпретировать как их реализацию во многих пространствах и временах. Это возможно, по их мнению, в силу “индивидуального пространства и времени, дополнительного к пространству и времени внешнего мира” [54, с.134]. Нашу психическую сознательную жизнь мы не можем исследовать и понять, если будем предполагать, что уже существуют готовые смыслы. Хотя, с другой

стороны, математики неохотно отрицают, что всякое доказательство, возможное в формальной системе, существовало даже до того, как его открыли и усвоили с помощью умственных построений. С позиций платонизма, можно сказать, что “неусвоенное доказательство” существовало всегда, хотя “усвоенное доказательство” должно быть еще найдено. Интуитивное допущение, сделанное Куртом Гёделем о том, что доказательство должно иметь только конечное число этапов, поскольку мы, как конечные существа, никогда не сможем буквально постичь бесконечное число утверждений. Именно эта “традиционная” интуиция математиков стала причиной их естественного беспокойства, когда Кеннет Аппель и Вольфганг Хакен использовали компьютерную программу, потребовавшую сотни часов машинного времени, для доказательства знаменитой “проблемы четырех красок”. Скептики не воспринимают “слово компьютера” как доказательство, однако даже при допущении достоверности сравнительно “простого” доказательства они не составляют “каталог импульсов” всех нейронов собственного мозга. Можно ли вообще “неусвоенное доказательство” называть доказательством? Кроме того, как отличать фактически усвоенные доказательства, от доказательств, которые могут быть усвоены в принципе? Например, до сих пор не доказана и не опровергнута гипотеза Римана о нулях дзета-функции. Даже если удастся найти ее доказательство, как это уже случилось с теоремой Ферма, можно ли будет это “неусвоенное доказательство” сделать обозримым и понятным?

В чем состоит доказательство – это вопрос, который занимает математиков гораздо меньше, чем-то, что доказано. Одна из причин этого явления в том, что, например, современная цивилизация оказывается бессильной перед проблемой античности из “пяти букв”, точнее пяти буквенном утверждении “Я лжец”. Возможно, эта проблема относится не к логике, математике или философии, а только к психологии мышления и человеческого сознания, в котором “присутствует” неалгоритмическая компонента. В современной физической теории отсутствует переходная область от одного масштаба к другому между классической физикой и квантовой механикой. На квантовом уровне возможно сосуществование взаимоисключающих, альтернативных вариантов реальности, поэтому, начиная с последнего десятилетия прошлого столетия, наблюдается рост интереса к “гипотезе квантовой природы человеческого сознания”. Один из возможных вариантов этой гипотезы представляет сознание как нечто подобное “квантовому компьютеру”, то есть такую макроскопическую подсистему мозга, которая благодаря своей квантовой природе способна воспроизводить сложные логические операции и эффективно обрабатывать разнообразную информацию. Вычислительная мощность квантового компьютера потенциально во много раз превосходит мощность классических компьютеров. Однако квантовые вычисления сами по себе неустойчивы. “Для осуществления устойчивых вычислений нужна гибридная система, сочетающая классические и квантовые принципы” [66, с.46]. Эта дополнительность проявляется в проблеме сознания в виде необходимости нервных процессов, подчиненных классическим законам. Соответствующая “классическая” подсистема стабилизирует и регулирует “квантовую” подсистему нашего мозга.

Лейтцен Брауэр, пытаясь ответить на вопрос о лучшей схеме, по сравнению с известными способами доказательства, предлагал изучать глубины своего сознания. Однако, если информация о глубинных процессах нашего сознания может оказаться вполне достаточной для опознания некоторого “мысленного объекта”, она часто бесполезна для его теоретического изучения. Для изучения доказательств как объектов необходимо понимание всех структур памяти, вовлеченных в процесс познания. Математическое доказательство позволяет иногда формулировать новые языковые правила, когда новые задачи не поддаются обобщению на них старых методов или проведению аналогий, игнорирующих качественные различия. Доказательства влияют на использование языка, поскольку создают новые языковые правила. Например, доказательство основной теоремы алгебры связано с созданием нового исчисления, поскольку решение этой теоремы зависело от введения символики комплексных чисел. Хотя для него в любом конкретном случае остается неопределенным, почему мы придерживаемся определенных теорий или методов, зависящих то ли от устройства реальности, то ли от наших привычек, определяемых социально принятыми правилами. В таких случаях согласие ученого сообщества заменяет математикам ту уверенность в своей правоте, которую можно обосновать только доказательством. С этой точки зрения можно говорить о некоторой расчлененности методологии и доказательства, если реальные методологические установки отделять от теоретических доказательств. В утверждении, что метатеория, достаточная для доказательства непротиворечивости теории, более богата, чем сама теория, скрыта некоторая двусмысленность.

С одной стороны, в таком доказательстве может быть использована только некоторая часть аксиом теории, а с другой стороны, в соответствии с теоремой Гёделя это доказательство должно содержать дополнительные утверждения, выходящие за пределы теории, но это не означает, что они всегда более сомнительны. “Нет никаких оснований а priori предполагать, – замечает философ науки Майкл Детлефсен, анализирувавший этот вопрос, – что если множество утверждений лежит “вне” теории и достаточно для доказательства ее непротиворечивости, то оно будет более сомнительным, чем всякое конечное множество суждений, принадлежащих теории” [184, с.310]. Такое предположение выглядит довольно абсурдно для математических теорий в целом. Если, в соответствии с теоремой Гёделя о неполноте, мышление человека богаче его дедуктивных форм, то язык должен обладать какими-то средствами, позволяющими передавать это богатство. Многозначность, метафоричность языка, его полиморфизм есть то средство, считает специалист по прикладной математике В.В. Налимов, которое позволяет преодолеть гёделевскую трудность в логической структуре нашего речевого поведения. Один из радикальных взглядов на математику состоит в том, что она не наука, а увлекательное искусство. Многие математики-практики согласятся с тем, что математика – это, в определенной мере, искусство, но в еще большей степени и наука, выделяющаяся своей обоснованностью, эффективностью и строгостью.

В духе философской концепции двойственности это одно и то же, по-разному воспринимаемое на “поверхности мышления”.

Согласно принципу дополнительности Бора для воспроизведения целостности объекта необходимо применять взаимоисключающие дополнительные классы понятий, каждый из которых развивает свою логически непротиворечивую линию суждений. “Не есть ли все это, – размышляет Налимов, – просто перенесение метафорического принципа построения суждений в нашем языке на язык физических теорий” [119, с.123]. Довольно длительное время математика была совокупностью высказываний относительно некоторого класса объектов, не имеющего никакого структурного порядка, и высказывание принималось за истинное как интуитивно очевидное или как доказанное на основе интуитивно очевидных высказываний. Как бы мы ни относились к интуиции, к соотношению интуитивного и логического, обе эти компоненты, дополняющие друг друга, являются необходимыми в математическом познании. В содержательных математических теориях мы имеем дело с определенным комплексом бессознательных принципов, которые регулируют наши рассуждения, ограниченные аксиоматическими предположениями. Такие бессознательные факторы, вырабатываемые в результате целенаправленных умственных занятий, принято называть интуицией. Но несмотря на открытие Роджером Сперри функциональной асимметрии полушарий человеческого мозга, практически доказавшее неустранимость интуиции из творческих процессов, все еще встречаются работы, в которых интуицию сводят к неосознанным логическим процедурам, подчеркивая тем самым значимость интуиции в математическом творчестве.

После того, как было осознано, что интуитивные доказательства часто приводят к серьезным ошибкам, стал развиваться аксиоматический метод с целью ограничения обращения к интуитивной очевидности, основная тенденция которого состояла в стремлении доказать как можно больше математических предложений. Недостижимым идеалом этой точки зрения было доказательство истинности каждого предложения, принимаемого за такое, поскольку каждое предложение доказывается на основе других, а эти другие – на основе дальнейших и так далее, если, в конце концов, где-то не прервать эту процедуру. Но в случае с множествами основной упор был сделан не на доказательства, а на определения, из которых предполагалось “конструировать” множества, подобно тому, как “конструировались” физические объекты. Это соответствовало духу врожденных идей Декарта и пониманию геометрических истин Канта, который утверждал, что априорность геометрии означает ее предшествование опыту, основанному на классическом европейском рациональном мышлении. “Для любого конкретного множества совокупность всех его определений воистину невообразима, – отмечает американский логик Георг Крайзел, – и что чувственные данные имеют тенденцию при более близком рассмотрении распадаться на части, а это вовсе не свойственно большинству объектов” [91, с.204]. После того, как математики осознали неясность и туманность объектов, называемых “множествами”, которые были кодифицированы в виде формальных аксиом, они установили некоторые их

основные различия, сравнимые с различиями между натуральными, рациональными и действительными числами. Парадоксы теории множеств чаще всего возникали тогда, когда собирали вместе свойства, представляющие интерес для разных видов чисел.

Два основных принципа, которым следует современная математика, явились результатом компромисса между реальными возможностями и недостижимым идеалом. Согласно первому из них, математическая дисциплина начинается с небольшого количества предложений – аксиом, а в соответствии со вторым, в рамках этой дисциплины предложение становится истинным, когда оно доказано с помощью аксиом или предложений, доказанных раньше. А что обосновывает доказательство? Многие математики склоняются к тому, что математическое доказательство лишь обосновывает выводимость некоторого утверждения по общепринятым, в соответствии с математической традицией, правилам “логической игры” из заранее доказанных по этим правилам утверждений. Но при таком объяснении теряется важнейшая дополнительная составляющая математического доказательства, а именно, выхолащивается суть в угоду форме, хотя формализация – это мощнейший математический метод, то есть “пренебрежение содержанием в пользу формы”. Хотя этот метод органически присущ математическому познанию, он, тем не менее, оставляет необъяснимой “фантастическую эффективность математики” в других науках. Однако каким способом мы получаем математическую истину? – это вопрос, который в контексте современной логики остается абсолютно непонятным. Тайна природы человека состоит в том, что сознание, не воспринимаемое как реальность, само создает реальности. Поэтому дуалистический взгляд на эту проблему в духе квантовой неопределенности можно явно или неявно принять в качестве рабочей гипотезы теории сознания. При таком подходе определенную нишу в изучении сознания будут занимать не только философы, психологи и биологи, но и математики, и физики. Необходимость совместных усилий различных областей знания обусловлена еще и тем, изменение состояния “коллективного сознания” изменяет облик нашей культуры. Напомним, что на фундаментальный вопрос: “Что есть истина?” не стал отвечать Понтию Пилату даже сам Иисус Христос, хотя он же совместил несовместимое, сказав: “Я есть...Истина”.

Подобно тому, как в физике запись произведенных наблюдений, измерений и вычислений дается на обычном языке, дополненном специальной физической терминологией, в математике, считает философ математики В.А. Карпунин, “формулировка результатов относительно формализованных теорий и описание этих теорий должны, в конечном счете, также производиться в естественном языке, но дополненном уже специальной метатеоретической терминологией” [77, с.97]. Математика не сводится к совокупности вычислительных приемов и вовсе не алгоритмический и вычислительный аппарат позволяет рассматривать ее как образец научности. В определенной степени, элементами идеала можно считать доказательность математических утверждений и способы построения ее теорий. Математизируемые науки становятся более абстрактными, чем они были до математизации. Проблема

бесконечного, или феномен бесконечного, заключается в том, что исследователь рано или поздно сталкивается с проблемами, мешающими его успешной работе. Понятие бесконечности до такой степени пронизывает всю математику, что некоторые ученые, и среди них такой известный математик, как Герман Вейль, определяют саму эту науку как “науку о бесконечном”. Для большинства математиков бесконечное есть специфический элемент математического метода или метафора конечного, поскольку при изучении бесконечное заменяется множественным числом конечного. С помощью метафор мифы используются в художественных и научных целях. Бесконечное как метафора конечного может быть насыщено богатым содержанием в зависимости от уровня воображения и изошренности сознания. Величие математики Герман Вейль усматривал именно в том, что почти во всех ее теоремах, в силу самой ее сущности, всякий вопрос о бесконечности решается на уровне конечного. В философии бесконечное предстает как слишком разветвленное семейство образов, чтобы их все можно было связать с метафорами конечного. Бесконечное и конечное в философии рассматриваются и как две противоположности, исключаящие что-либо третье.

Вопрос о соотношении между бесконечным и конечным относится к сущности математики как теоретической науки. Методологическая трудность заключается в том, что обращение в математическом рассуждении к бесконечным объектам и способам оперирования с ними, которые отчасти создаются в процессе рассуждения, а отчасти подлежат созданию в дальнейшем рассмотрении, делает его совершенно недедуктивным. Ссылаясь на конечность символической записи любого математического рассуждения, можно считать, что, постигая бесконечное, мы каждый раз имеем дело лишь с конечным. Именно этот аргумент лежит в основе отказа от использования понятия актуальной бесконечности в программах интуиционистов и конструктивистов. Безусловно, такие подходы полезны, с точки зрения приложений дискретной математики и теории алгоритмов, но это только часть математики. С другой стороны, такая трактовка современной математики противоречит принципу двойственности в развитии математики, проверенному ее многовековой историей. Например, известный математик А.В. Архангельский формулирует его так: “противоречие, заключенное в сопоставлении, противоположности и взаимодействия конечного и бесконечного, является одним из главных диалектических противоречий, вызывающих развитие математики” [10, с.28]. Поэтому было бы ошибочным считать, что “запрет бесконечного” и методы, развиваемые в отдельных областях математики, можно распространить на всю науку во благо конечного в математике. Давид Гильберт, творчество которого охватывало по существу всю математику, считал, что бесконечное нигде не реализуется, его нет в природе, поэтому проблема бесконечности – это проблема, собственно, теоретической науки, а в первую очередь философии и математики. Но с философской точки зрения, математические мысли лучше представляются бесконечными объектами, чем словами естественного языка, которые используются для их сообщения.

В теории категории и теории меры для характеристики бесконечных, в определенном смысле, “малых” множеств используются, соответственно, понятия множества первой категории и множества меры нуль. Это один из наиболее ярких примеров дополнительных понятий в математике. Каждое счетное множество является множеством первой категории и лебеговской меры нуль, но и несчетное канторово множество тоже имеет нулевую меру. Фундаментальная двойственность между мерой и категорией вытекает из двух направлений, по которым развивалась теория множеств Кантора. Одно из них разрабатывало понятие мощности чисто абстрактным образом, то есть без учета природы рассматриваемых множеств. Это логический подход. Второе направление касалось теории точечных множеств на прямой, плоскости и многомерных метрических пространствах. Оно способствовало становлению топологии и теории абстрактных пространств с помощью геометризации математики. Интуитивное восприятие теории множеств, безусловно, неоднозначно, поэтому могут сосуществовать их качественно разные характеристики и даже разные формализации. В расширенном толковании, рассматриваемая двойственность – это дополнительность логики и топологии. На простейшем примере канторова множества можно проиллюстрировать то, что мы называем геометризацией математики в смысле указанной выше дополнительности. Рассмотрим множество чисел вида $\varepsilon_1/2 + \varepsilon_2/2^2 + \varepsilon_3/2^3 + \dots$ и множество чисел вида $2\varepsilon_1/3 + 2\varepsilon_2/3^2 + 2\varepsilon_3/3^3 + \dots$, где каждое число ε_i – это либо 0, либо 1. Чтобы избежать повторения некоторых чисел, для которых возможны по два представления, указанного вида, условимся использовать в подобных случаях то из двух представлений, в котором соответствующая последовательность чисел (ε_i) оканчивается бесконечной последовательностью единиц. Указанные множества находятся во взаимно однозначном соответствии и, следовательно, имеют одну и ту же мощность.

С геометрической точки зрения это разные множества, однако абстрактно они неразличимы. Первое множество – это отрезок $[0, 1]$, а второе – это знаменитое канторово множество. Оно получается выбрасыванием из отрезка $[0, 1]$ его открытой средней части, то есть интервала $(1/3, 2/3)$, затем открытых средних третей оставшихся отрезков, то есть $(1/9, 2/9)$ и $(2/3+1/9, 2/3+2/9)$ и так далее до бесконечности. Поразительно то, что с одной стороны, в нем много точек – это несчетное множество мощности континуума, а с другой стороны, оно очень разреженное, то есть оно нигде не плотно на отрезке $[0, 1]$. К примеру, рациональные числа отрезка $[0, 1]$ образуют всюду плотное множество, но оно имеет мощность меньше, чем канторово множество, поскольку оно несчетно. Таким образом, одно множество может быть мощным, но разреженным, а другое – скудным, но плотным. Эта поразительная двойственность следствие глубокого математического обобщения таких понятий как “количества элементов” и их “расположения в пространстве”. Такой тип философско-математической дополнительности даже способствует пониманию общих концептуальных оснований современной физики, так как такая дополнительность логики и топологии предоставляет возможность соединить “существующее” и “мыслящее” в одних и тех же объектах. Таким

образом, гносеологическая новизна ряда проблем математики способствует методологическому анализу широкого толкования идеи дополненности. Математики XIX века смущали парадоксы подобных конструкций. Тогда казалось, что такие множества, полученные с помощью абстрактных описаний, в классическом анализе возникнуть не могут. Но на деле оказалось, что все гораздо сложнее.

Канторово множество и множество рациональных точек оба “малы”, но по дополнительным друг к другу способам описания. Первое в силу того, что его лебегова мера равна нулю, а второе потому, что оно является множеством первой категории, то есть оно является счетным объединением нигде не плотных множеств. Понятие категории активно используется математиками при доказательстве теорем существования. Образно говоря, в этом методологическом приеме проявляется своеобразная “телескопическая функция этого понятия”. Двойственность между мерой и категорией помогает прояснять сущность этих математических теорий с помощью их различия и сходства. Теория меры более разработана, в силу важности ее приложений, чем теория категорий, поэтому дополненностью этих теорий пользуются в основном для выявления новых эффектов в теории меры с помощью изучения категорий. Теорема Бэра о категориях дает нам возможность обнаружить математические объекты, которые без нее было бы довольно трудно разглядеть. Феноменальный факт, говорящий о сложности понятия несчетного множества, состоит в том, что единичный отрезок и даже прямую можно разбить на два дополняющих друг друга множества, одно из которых первой категории, а второе меры нуль. Несмотря на то, что канторово множество суть объект непростой природы, “существующий” в некоем нематериальном “мире идей”, эта абстрактная конструкция была использована Бенуа Мандельбротом при выработке эффективной стратегии борьбы с ошибками при передаче информации. Он рассматривал погрешности в передаче информации как “последовательность Кантора”, то есть “пыль” из точек канторова множества, во времени. Подобные множества точек оказались необходимы при моделировании прерывистости, природу которой нельзя было объяснить с помощью локальных явлений.

Георг Кантор смело порвал с многовековой традицией, рассмотрев бесконечные множества как единые сущности, доступные человеческому разуму. Одним из его самых главных математических достижений было построение теории трансфинитных чисел для оценки количества элементов в актуально бесконечных множествах. “Все так называемые доказательства невозможности актуально бесконечных чисел, – писал Кантор, – являются ... ошибочными по существу ... в том, что в них заранее приписывают или скорее навязывают рассматриваемым числам все свойства конечных чисел. Между тем, бесконечные числа ... ввиду своей противоположности конечным числам, должны образовывать совершенно новый вид чисел, свойства которых зависят исключительно от природы вещей и образуют предмет исследования, а не нашего произвола и наших предрассудков” [73, с.263]. Трудность исследования перехода к математическим бесконечностям состоит в том, что изучаемые

реальные объекты конечны, поэтому в результате математической формализации слишком “удаленные” элементы могут потерять свою “индивидуальность” и соответствующая бесконечность становится, по существу, незавершенной. Другой тип бесконечности возникает в результате схематизации, когда дискретность заменяется на непрерывность, например, суммы – на интегралы. Можно указать и на существенное отличие в подходе к бесконечному, точнее к понятию бесконечно малого, в прикладной математике и классическом анализе. Поэтому в конце XIX века возникла философия математики как самостоятельная дисциплина, основной проблемой которой стало логическое обоснование нашего мышления в контексте объективного и субъективного взгляда на математическую реальность. С противоречием между эмпирическими фактами и здравым смыслом естествознание столкнулось при изучении неживой природы в области квантовой механики, а математика – в теории бесконечных множеств. Различные способы наблюдения в квантовой механике дают различные, нередко взаимно противоречивые результаты.

Психология знает множество сходных явлений, при изучении которых нельзя говорить о результате наблюдения, не описав способы наблюдения. Одна из величайших загадок природы заключается в потрясающем соответствии абстрактных математических структур реальному миру, другая состоит в способности нашего мышления вывести математическое совершенство из несовершенной и хаотичной реальности, а третья – в непостижимой математичности физического мира. Нельзя избежать вмешательства реального мира в современную математику, чтобы не вызывать “отвращения” к науке в целом и к доказательствам и убедительной аргументации в частности. С другой стороны, когда историк математики, по мнению такого профессионала как Ф.А. Медведев, “пытается применить гильбертовскую идеализацию к реальным доказательствам, он постоянно сталкивается с тем фактом, что рассуждения при их проведении оказываются, как правило, неудовлетворенными, нестрогими, неполными и т.п.” [112, с.195]. Обычно рассуждения, в которых фигурируют новые объекты, проводятся по старым канонам и только на более поздней стадии, в связи с возникающими сопутствующими проблемами, ставится вопрос о законности такого оперирования с ними. Возможно, поэтому к гильбертовскому идеалу более или менее приближаются рассуждения методически отработанных сочинений, среди которых наиболее доступным образцом является школьная математика. Наметившиеся тенденции “изгнания” доказательств из школьного обучения опасны в том плане, что те, кто не постигли “искусство доказательства” в школе, не способны самостоятельно отличить правильное рассуждение от неправильного. Проблема “правильных рассуждений” остается актуальной и в современной математике более высокого уровня.

Напомним, что выдвинутый Давидом Гильбертом план “спасения” теории множеств состоял в предложении аксиоматизировать эту теорию в духе разработанной им теории доказательств, а затем доказать непротиворечивость установленной системы аксиом. Но эта труднейшая задача, поставленная Гильбертом так до сих пор и не решена. Более того, в связи с полученными в

прошлом веке “результатами о независимости”, то есть математических утверждений, недоказуемых в аксиоматической теории множеств, так же как и их отрицаний, можно предположить, что проблемы этих идеализаций не только в том, что не установлена их непротиворечивость. Анализируя методы описания реальности, Герман Вейль приходит к парадоксальному выводу, что непосредственно испытываемое, каким бы туманным оно ни представлялось, является хотя и субъективным, но, в то же время, и абсолютным, а объективный мир, который пытается понять и воссоздать наука, в свою очередь, относителен. Теоретические построения не являются единственными подходами. Другой путь – это, по Вейлю, интерпретация или “понимание изнутри”, то есть непосредственное знание, складывающееся из ощущений, чувств и поступков, совершенно отличное от теоретического знания, которое представляет в символах “параллельные” процессы мозга. “Было бы соблазнительно, распространить принцип дополнительности Бора на отношение между двумя противоположными подходами, которые мы здесь обсуждаем” [28, с.359]. Но, сравнивая их, необходимо учитывать следующий неоспоримый факт: методы конструктивной теории показали свою “неограниченную широту и глубину”, поскольку каждая решенная проблема ставит новую, для которой тоже можно найти убедительные решения.

В отличие от этого подхода “понимание изнутри”, по мнению Вейля, практически ограничено человеческой природой, и в лучшем случае, может быть расширено уточнением языка. Суть обоснования состоит в нахождении аргументов, столь же значимых для других, как и для нас. Если бы можно было найти объективные утверждения, то есть очевидно истинные, не подлежащие сомнению кого-либо, то они могли бы стать основанием всего научного знания, начиная с математики. Научное математическое знание – это теории и их логические соотношения. За исключением противоречий логика, вообще говоря, не может продемонстрировать, что высказывание ложно. Из двух противоречащих суждений одно должно быть истинным, а другое ложным. Но как узнать, какое из них истинно, а какое ложно? Согласно теории критического рационализма Карла Поппера, никакое суждение не может быть обосновано, и тем самым определено как истинное. Отсюда следует, что рациональность не столько внутреннее свойство знаний, как проблема для исследователей, поскольку формальное суждение должно предполагать принятие критики. Мы рациональны, по Попперу, в той мере, в какой мы открыты критике, включая самокритику, и нам не дано предвидеть, какие фрагменты научного знания потерпят фиаско. И хотя он доказывал, что науку нельзя свести к методике, парадокс состоит в том, что его схема опровержимости как раз и была такой методикой.

Трактуя как дополнительные понятия классическую и неклассическую стратегии познания, на базе гуманитарного знания можно развивать менее свойственную ей классическую рациональность, а соответственно, на основе естественнонаучного знания следует искать новые подходы к неклассической рациональности. Проблема формализации гуманитарных понятий схожа с ситуацией, возникшей вокруг теоремы Гёделя о неполноте. Подобно тому, как

любая непротиворечивая система содержит пример неразрешимого в ней истинного утверждения, когда гуманитарное понятие, разъясняемое на “прецедентах”, становится почти фиксированным и общепринятым, придумываются “прецеденты”, не подходящие под это определение. Классический литературный пример такого рода – это отношения Ромео и Джульетты, создавшие прецедент, не подходивший под почти что “формализованное” в то время понятие “любви”. Как и в принципе дополненности, поскольку гуманитарные понятия неформализуемы, они имеют противоречащие друг другу формализации и, следовательно, целесообразно рассматривать их совместную формализацию. Становлению целостно мыслящей личности может способствовать взаимодействие естественнонаучной и культурологической компонент современного знания, поэтому науки нового поколения стремятся сочетать аналитичность научного метода с синтетическим восприятием гуманитарного взгляда.

Мы интерпретируем мир с помощью собственной логики, но насколько она адекватна “реальности”, мы можем судить только с помощью той же самой логики. Это уже напоминает вторую теорему Гёделя о неполноте, из которой следует, что противоречивы только те версии формальной теории чисел, которые утверждают собственную непротиворечивость. В реальных явлениях и процессах математическими средствами изучаются “простые” модели, “сложное” исследуется гуманитарными методами. Однако математика, совершенствуя свое “техническое оснащение”, вторгается в новые сферы исследований, поэтому граница между “простым” и “сложным” не является неподвижной. Она зависит от уровня развития рациональных методов математического моделирования. “В то же время, – утверждает специалист по прикладной математике и информатике Ю.Н. Павловский, – даже в самых “математизированных” приложениях используются и гуманитарные методы анализа и прогноза” [127, с.195]. Например, механизм ядерного сдерживания он анализирует не только с помощью понятий и представлений математической теории управления, теории игр и исследования операций, но и методами гуманитарного характера, рассматривая психологические факторы в вооруженной борьбе, в частности, “фактор Л.Н. Толстого” – дух войска. Стремление человека глубже понять собственные психические структуры кажется вполне естественным. Каждое значительное открытие получает метафорическую трактовку, выходящую за пределы его специального содержания. Мир слишком сложен, чтобы позволить человеку роскошь примирить между собой все его убеждения, возможно, это – лучшая метафорическая аналогия теоремы Гёделя.

Все результаты, зависящие от дихотомии субъекта и объекта, оказываются ограниченными. В квантовой механике к соответствующим эпистемологическим проблемам относится принцип неопределенности Гейзенберга, а в метаматематике – теоремы Гёделя о неполноте. Чтобы совместить в одном подходе понятия дискретности и частицы Вернер Гейзенберг предложил несколько нововведений. Одно из них касалось смыслового содержания термина “наглядный”. Придав ему эмпирическое

значение, он настаивал на том, что квантовые скачки и дискретность являются неотъемлемой сущностью атомного мира, отвергая при этом идею “наглядных” атомных моделей. Это изменение было сделано, по мнению историка немецкой науки Дейвида Кассиди, с целью противостоять критике со стороны Эрвина Шредингера, утверждавшего, что “физика дискретных частиц существенно иррациональна и не наглядна” [78, с.67]. Сюда примыкало и второе нововведение, состоявшее в переопределении классических понятий: координата, скорость и траектория атомной частицы в терминах характеристик экспериментальных операций, которые можно измерить, хотя в этих измерениях всегда проявляется соотношение неопределенностей. Заметим, что никакие проблемы не могут быть решены с помощью символов или понятий, лишенных значения. Не случайно, Готлоб Фреге утверждал, что знак, лишенный значения, – это даже не знак, а просто “физическое явление”, вроде чернильного пятна определенной конфигурации. Гуманитарные трактовки теорем Гёделя тоже следует отличать от точных следствий этих теорем, относящихся к методологии самой математики.

Наряду с упомянутыми проблемами и важнейшими философскими следствиями теорем Гёделя достаточно указать на методологическую полемику по поводу применимости компьютеров при доказательстве теорем, актуальности существования и включенности человека в виртуальную реальность. Традиционные ошибки математической формализации “группируются” либо возле прямого противоречия, либо возле расхождения с истинностью в стандартной модели. В случае ошибки в программе она выдает не то, что надо, или просто “виснет”. В отличие от этого, в описании алгоритмических языков трудно сделать ошибку, которая привела бы к явной невычислимости формальных конструкций. Именно компьютеры, строго следуя “инструкциям”, заставили людей-пользователей работать со сложными формализациями. Особенность человека в этом противостоянии, на которую впервые обратил внимание Н.Н. Непейвода, проявилась в том, что “даже сложные формальные понятия человек склонен понимать как неформальные” [123, с.371]. Поэтому удивительно, что в информатике до сих пор практически нет понятия ошибки в основаниях программирования, а именно, в определении алгоритмических языков. С этой проблемой связан вопрос о том, что такое “формализация неформализуемого” и как с ней работать, несмотря на содержащееся в этом понятии внутреннее противоречие. В эпоху виртуальных построений и компьютерного моделирования явлений забывается, что природа легко может поставить экспериментаторов в тупик. Это не означает, что математики и физики постоянно обеспокоены проблемой истинности всего “здания математики”, но, когда они сталкиваются с неординарными, очень длинными или полученными на компьютере доказательствами, они начинают задумываться над тем, что же следует теперь иметь в виду под понятием “доказательства”. Новые технологии отражают новую онтологию соотношения актуального и потенциального, поэтому виртуальность можно определить и как актуальность самой потенциальности.

Согласно некоторым интерпретациям теорем Гёделя, выходящим за сферу методологии и философии математики, из них вытекает несоизмеримость формы и содержания мышления, неустранимость интуитивной компоненты мышления и, соответственно, невозможность искусственного интеллекта. Многие трактовки подобного рода создавались и поддерживались самими учеными, однако такие интерпретации мало что оставляют от программы Гёделя для определенного класса формальных систем как математических теорем. Но есть и позитивные примеры, например, алгоритмическая теория информации представляет собой не истинно новое развитие, а по существу продолжение взглядов Гёделя. Теоремы Гёделя о неполноте не противоречат созданию компьютеров или их преемников, которые смогут манипулировать символами примерно с тем же успехом, что и мозг человека. Возможно ли доказать превосходство человеческого разума над компьютером, в общенаучном и философском контексте проблемы искусственного интеллекта, в сфере решения математических задач? Этот вопрос Ван Хао обсуждал в своих беседах с Куртом Гёделем, чьи философские взгляды он анализирует в статье “К проблеме физикализма и алгоритмизма: могут ли машины мыслить?” [189, с.97]. Для любой формальной системы, в том числе и вычислительной машины, всегда найдется утверждение типа математической теоремы, которое машина не сможет ни опровергнуть, ни доказать. На подобное высказывание, доказанное Гёделем, ссылаются при попытках обоснования превосходства человеческого разума над компьютером. Сам Курт Гёдель признавал, что его теоремы не дают такого доказательства, и вовсе не исключал возможности построить машину, сравнимую с человеком в математических способностях, что демонстрируют, например, современные шахматные программы.

Из теорем Гёделя по существу следует, что мы не сможем строго доказать, что построили именно требуемую машину и даже то, что она доказывает только правильные теоремы. Но это с некоторой долей вероятности не мешает утверждать, что машина гипотетически может обладать требуемыми свойствами. Необходимость такой оговорки вытекает из предполагаемых следствий принципа неопределенности Гейзенберга и теоремы Гёделя о неполноте, поскольку та часть человеческого мозга, которая вступает с нами в коммуникацию с помощью рационального и научного языка, представляет собой некоторый инструмент познания, искажающий объект своего наблюдения. Современная наука вынуждена признать невозможность определения объективности независимо от сознания человека, а когда позиции не совпадают, то из “удержания вместе” двух и более взглядов возникает взаимодополнительность, или “дуализм по Бору”. Квантовая философия обнаружила противоречия, возникающие при разделении мира на объект и субъект. Заметим, что в качестве альтернативы к стандартной (копенгагенской) интерпретации квантовой механики рассматривается программа причинной квантовой теории. В широком смысле, эта программа представляет собой ряд теоретических попыток обоснования, в которых центральную роль играет, вообще говоря, не детерминизм, а скорее реальное существование некоторых физических сущностей и объектов. Принцип неопределенности Гейзенберга

изменил фундаментальные представления о науке и подтолкнул к смелым выводам о том, что во Вселенной еще остается место для человеческой свободы и деятельности, а согласно теореме Гёделя о неполноте сложное явление можно понять лишь в формализованной системе, превосходящей математическое описание этого явления. В современной физике, подобно постгёделеской математике, существуют истинные законы природы, которые не могут быть выведены из общих фундаментальных теорий, хотя они и не противоречат им. И не смотря на то, что современная философия науки уже не говорит об объективности внешнего мира, отдаленного от человека, максима познания истины – “Начала необходимо принять, а прочее доказать”, завещанная нам Аристотелем, опирается на веру в незыблемость рациональной мысли.

В науке и искусстве можно обрести, по Иммануилу Канту, лишь иллюзию “целостности и samozавершенности” и до тех пор, пока эта иллюзия не принимается за реальность, она не вызывает недоразумения. Большинство логиков и философов науки убеждены в том, что невозможность осуществления формалистской программы в полном объеме по отношению к достаточно богатым математическим теориям доказана столь же строго, как, например, невозможность вывода аксиомы о параллельных из остальных аксиом евклидовой геометрии. Однако против такого мнения есть философские и методологические возражения, связанные с “диагональным аргументом Кантора”. Общая идея состоит в невозможности раздельного существования, точнее в дополнительном характере их сосуществования, таких дисциплин, как логика и учение о бесконечном. В ряде философско-математических работ показано, что общепринятое доказательство несчетности континуума при помощи диагонального метода не выглядит логически безупречным. Современная теория множеств “умеет” различать бесконечные множества по их мощности. Основанием для такого различения бесконечностей, к сожалению, по существу единственным, является теорема Кантора о несчетности множества всех действительных чисел. Различные типы бесконечности, присутствующие в теории Кантора, имеют значение и для доказательства теоремы Гёделя о неполноте. Заметим, что для доказательства своих теорем Курт Гёдель пользовался расширением “диагонального доказательства” Кантора. Изобретение новых видов доказательства всегда будет необходимо для математиков, которым для их обоснования понадобятся новые способы объяснения. Специалист по компьютерной математике А.А. Зенкин настаивает на том, что с помощью своего диагонального метода “Кантор в действительности доказывает, причем строго математически, именно потенциальный, то есть принципиально не завершаемый характер бесконечности множества всех действительных чисел” [65, с.167]. Другими словами, считает он, это подтверждает знаменитый тезис Аристотеля “*Infinitem Actu Non Datur*” – это знаменитое утверждение о невозможности существования логических или математических, то есть мыслимых, а не существующих в природе, актуально-бесконечных объектов.

С точки зрения “мощности”, фундаментальное свойство любой потенциальной бесконечности можно интерпретировать в том духе, что все

бесконечные множества “бесконечны одинаково”, поскольку не содержат всех своих элементов. Канторовское доказательство использует диагональ в буквальном смысле слова. Другие “диагональные” доказательства основаны на более общем понятии, абстрагированном от геометрического смысла слова. Как отмечает в своем анализе первой теоремы Гёделя о неполноте Герман Вейль, “парадоксальность” входит в “конструкцию Гёделя” в виде “диагонального процесса”, с помощью которого Кантор доказывал, что континуум несчетен [29, с.225]. Именно при помощи процесса, аналогичного диагональной процедуре Кантора, Курт Гёдель в рамках рассматриваемой системы сформулировал предложение, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть средствами самой этой системы, если она, разумеется, непротиворечива. Следует при этом отметить, что сами понятия несчетности и неразрешимости не ставятся под сомнение, а критически анализируются только способы рассуждений, опирающиеся на диагональную процедуру. Общенаучный статус этих понятий находится на стыке логики, математики и философии, поэтому он не может быть опровергнут средствами только одной из этих дисциплин и от ошибок в столь сложных вопросах не застрахован никто. Математика и логика не идеально строги и не идеально дедуктивны, они лишь более строги и более дедуктивны, чем эмпирические науки. Поэтому математики не считают нужным “сковывать себя цепями” жесткого гильбертовского формализма в своей повседневной работе и, несмотря на недостаточность гильбертовской концепции доказательства, современная математика продолжает жить в приложениях, хотя теория математических доказательств нуждается иногда в переформулировках. Давид Гильберт охотно цитировал следующую поговорку: “Когда дом готов, леса убирают”, которую, тем не менее, не применял к своей теории доказательств. Фундаментальная сложность современного математического познания состоит в том, что “леса” теории доказательств, даже если они состоят из “ложных представлений”, убрать невозможно, хотя они и заслоняют собой величественное и красивое здание формальных математических доказательств.

Теоремы неполноты – это не парадоксальный курьез, как хотелось бы считать некоторым математикам, а часть множества глубоких проблем, поставленных математикой. В связи с увеличивающейся сложностью проблем, математикам придется продолжать пополнять базу аксиом, другими словами, “чтобы больше знать, нужно больше предполагать”. На первый взгляд математика кажется набором аксиом, но, математики уверены в том, здесь все же речь идет об одном и том же искусстве, а именно об искусстве математического описания мира. Такое понимание математической науки предполагает ее рассмотрение в общекультурном контексте человеческой деятельности. Поэтому по разным причинам возрастает роль субъективного фактора в математическом познании. Из первой теоремы Гёделя о неполноте следует, что система правил из монографии *Principia Mathematica*, а в действительности правила из достаточно широкого класса “родственных” систем, не позволяет вывести все истинные арифметические теоремы, которые можно записать логическими средствами, исходя из полиномиальных равенств

с целочисленными коэффициентами и переменными. Дополнительный урок состоит в том, что в указанных случаях для некоторых ценных результатов, возможно, потребуются неформальные системы. Важнейшее приложение второй теоремы Гёделя о неполноте состоит в предоставлении полезного метода перепроверки предлагаемых доказательств непротиворечивости. По существу в программе Гёделя речь идет о методологическом переосмыслении роли гильбертовской идеализации формального доказательства в математике.

С позиций философской компаративистики современная философия математики включается в философско-математический диалог и участвует в методологическом взаимодействии с целью достижения определенного уровня целостности и системности, делающей ее доступной для концептуализации, когда она начинает приобретать черты универсализма. Философская компаративистика в практической математике выступает как методологический ориентир, что особенно важно для формирования познавательно-преобразовательного мировоззрения. Такой подход можно проиллюстрировать на отношении к теоремам существования в классическом и конструктивном анализе. Например, известная теорема Вейерштрасса о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности является чистой теоремой существования классического математического анализа, поскольку известные методы ее доказательства не дают способа приближенного нахождения пределов таких последовательностей. Но вот что отмечает авторитетнейший математик Л.Д. Кудрявцев: “В конструктивном анализе доказываем, что существуют монотонные последовательности, для которых заведомо не существует алгоритма, с помощью которого можно было бы найти их предел с любой наперед заданной точностью” [92, с.126]. Однако качественные исследования вопросов существования и единственности решения, а также его непрерывной зависимости от начальных данных, то есть корректной постановки задачи, могут оказать важную методологическую помощь в проведении неформального математического исследования.

Онтологический аспект психической сущности человека заключается в том, что сравнение как способ существования критичности свойственно человеческому мышлению. Математик, согласно Георгу Кантору, сравнивая, проявляет свободу мысли. На способы аргументации научного знания влияют ограничения классической науки, поскольку, например, даже “постклассическое развитие физики предполагает неизбежное обращение к понятиям классической физики” [181, с.101]. Философско-методологическое единство программ обоснования математики – это результат отражения единого действительного мира во всем его многообразии и целостности в контексте различных направлений развития современной математики, несмотря на неоднородность философских подходов к проблеме обоснования математики. Например, существование актуальной бесконечности не противоречит математической интуиции, и такая бесконечность воспринимается математиками даже лучше, чем потенциальная бесконечность, которую философы не зря прозвали “дурной”. Можно также заметить, что притягательной чертой актуальной бесконечности является ее логическая

простота, так как с актуальной бесконечностью легче обращаться, чем с потенциальной бесконечностью. Когда вещественные числа определяются через классы рациональных чисел с помощью сечений Дедекинда, то они предполагаются существующими изначально и их существование открыто интуиции математика.

Но обращение к такого рода интуиции, по мнению философа математики В.Н. Тростникова, означает фактический отход от рационализма, так как она может находиться “где угодно, только не в рассудке”. Уместно заметить, что философская идеология актуально-бесконечных множеств проникла в сознание математиков задолго до строгого обоснования теории вещественных чисел. Для человека как духовного существа вполне понятны реалии “горнего мира”, как царства бесконечности и вечности, поскольку там нет ни времени, ни пространства. “Сейчас нам ясно, что математика так же двухприродна, как и сам человек: одна часть ее занимается числами, а другая бесконечностью. Но, как для человека горний мир важнее дольного, так и в математике вторая ее часть важнее первой, так как ее познавательные ресурсы богаче, что показано Парисом и Харрингтоном” [160, с.149]. Речь идет о том, что познавательный математический потенциал поднялся на новый уровень благодаря фигурирующему в дифференциальном и интегральном исчислении понятию актуальной бесконечности, невыразимому в логико-арифметическом языке. Математики и логики Джеф Парис и Лео Харрингтон высказали предположение, что некоторое потенциально-бесконечное арифметическое множество обладает определенным арифметическим свойством, а затем показали, что это предположение нельзя доказать в арифметике. После этого они допустили существование некоего актуально-бесконечного множества и только на этом допущении, не используя никаких свойств этого множества, доказали свое предположение.

С точки зрения методологии математики, теорема Париса-Харрингтона означает, что математический анализ не сводим к арифметике, поскольку арифметика оперирует только с рациональными числами, а анализ с вещественными числами, выразимыми в философской категории актуальной бесконечности, которую нельзя определить через потенциальную бесконечность с помощью математического понятия “предельного перехода”. Исходя из этого, можно заключить, что Давид Гильберт имел все основания называть математику «наукой о бесконечности», поскольку при любом философском размышлении о сущности математики из глубин сознания вполне естественно извлекается эта бесконечность. Сравнительный анализ как методологическое основание истории философии математики представляет ее не как сумму разрозненных программ обоснования, а как целостный феномен, выявленный с помощью этих философских программ, которые не разъединяют его, а способствуют пониманию исторической устойчивости и целостности интеллектуального феномена под названием “математика”.

Философия математики в традиционном понимании – это деятельность в поиске фундаментальных обобщений применительно к математике, но главное в ней не только прояснять возможности синтеза программ обоснования для обеспечения единства математики, но и удерживать различия, полезные для развития самой математики. Для этого необходим поддерживающий новую концепцию обоснования философский анализ, отличный от обычного использования философии в современных основаниях математики, где ее почти полностью заслоняет сложная структура самой математики. Осмысление философско-математической культуры в единстве ее историко-мировоззренческих уровней возможно только в диалоге, который до сих пор ведется по отношению к методологическим установкам к математике, по рационалистическим предпосылкам и по логико-математическим аксиомам.

Использование философской компаративистики в таком диалоге – это выявление того, что всегда было присуще математике, но приобретает принципиальное значение в проблеме обоснования математики именно на современном этапе историко-философского осмысления математического знания. Отличия в традиционных программах обоснования математики имели не только математический, но и философский характер. Они особенно ярко проявились, прежде всего, в различии подходов при рассмотрении проблем, связанных с идеей бесконечности. Для сохранения наиболее важных и содержательных результатов, полученных ранее классической математикой, необходимо было обоснование используемой в ней абстракции актуальной бесконечности.

Суть методологического подхода Гильберта состояла в том, чтобы формализовать математику, использующую абстракцию актуальной бесконечности и сделать ее объектом метаматематического исследования. Негативный аспект противостоящего этому интуиционистского подхода Брауэра состоял в отрицании основных понятий классической теоретико-множественной математики, а позитивный – в выделении конструктивных направлений в математике. Эти два основных подхода к обоснованию математики, которыми являются интуиционизм и формализм, заострили философскую дилемму интуитивного и дискурсивного, с точки зрения содержательного и формального в математике. Различия между основными программами обоснования – формализма и интуиционизма – были в определенной степени взаимодополнительными.

Концептуальной идее дополнительности или “составленности” в описании программ обоснования математики противостояла идея целостности или неразрывности ее описания, философская традиция которой восходит к известным мировоззренческим взглядам Платона. Компаративистская методология дает возможность интерпретировать реальные подходы к обоснованию в общепhilosophических категориях, чтобы понять тенденции развития философии математики. Человеческое восприятие по своей природе дуалистично, даже использование терминов и понятий всегда дуалистично, поскольку каждое такое слово представляет собой определенную умозрительную категорию. Дуализм прослеживается не только в процессе

восприятия, но и способах понимания мира. Понимание, которое не ограничено требованием сочетания взаимоисключающих концепций, но учитывающее специфику особенностей их проявления, в методологическом аспекте можно трактовать в духе широкого толкования идеи дополнительности Нильса Бора.

Концепция дополнительности имеет фундаментальное значение в методологии науки XX века, что привело в культурной практике к появлению феномена постмодернизма, главный эстетический принцип которого состоит в дополнительности научных и художественных языков. На стыке математики, физики и информатики во второй половине прошлого века возникла экспериментальная математика, открывающая новые математические закономерности с помощью компьютерной обработки различных примеров и являющаяся в некоторых случаях убедительнее длинного и сложного доказательства. Чтобы придать методологический смысл компьютерной математике, необходимо помнить о том, что слова “абстрактный”, “конкретный”, “общий” в теоретической математике не имеют абсолютного значения. Математика отражает природу реально существующих объектов и процессов вычисления, так же как и природу идеальных объектов, поскольку математики “сжимают” результаты вычислительных экспериментов в аксиомы, а затем выводят из них теоремы.

Методологические проблемы, поставленные Гильбертом, оказались столь актуальными, что практически вся философия математика XX века развивалась под влиянием поставленных им задач. Чтобы показать несправедливость широко распространенных крайних утверждений, в науке XX века были получены новые теоретические конструкции. К ним можно отнести принцип дополнительности Бора и теоремы Гёделя о неполноте. Процесс переноса границы между наблюдателем, изучающим окружающий мир, и этим миром аналогичен акту расширения формальной системы в программе Гёделя. Существование некоторых формально неразрешимых проблем в математике само по себе еще ничего не говорит об их значимости в смысле частоты их появления в различных областях науки. Поэтому теоремы Гёделя, вообще говоря, не сужают обычную сферу использования аксиоматического метода и не ограничивают ее реальные функции.

Главный вывод из теорем Гёделя о неполноте состоит в том, что граница между интуитивным и формальным проходит не между гуманитарными и математическими науками, а она проходит везде, в том числе и в самой математике. С помощью философской компаративистики можно попытаться сделать доступными ценности разных методологических подходов к обоснованию математики. С математической стороны переформулировка цели обоснования, приведенная выше, вообще говоря, не представляет большого интереса, но с философской стороны она необходима хотя бы потому, что формально-доказательный анализ включает также редукцию к некоторым интуиционистским методам математического доказательства. Это вполне в духе концепции дополнительности, основной принцип которого ни к чему не сводим, так как он первичен.

Основные три точки зрения на способы существования математических объектов можно описать так: они существуют в идеальной реальности (платонизм); они существуют как определенного рода абстракции (формализм); они существуют как конструктивное определение реальности (интуиционизм). Эти точки зрения допускают системный синтез в контексте формирования расширенной программы обоснования математики. Можно даже предположить, что теоретически нейтральной точки зрения не существует и, следовательно, окончательный контекст философско-математической мысли невозможен. Поэтому перспективы развития философской компаративистики в математике связаны с актуализацией традиционных требований программ обоснования математики и общенаучных критериев рациональности.

Общеметодологическая значимость принципа дополнительности для обоснования математики состоит в том, что системный синтез программ обоснования методологически возможен только в форме дополнительности, включающей снятие противоположных подходов в более высоких по уровню программах. У нас нет достаточных причин ожидать существования единой программы обоснования, поскольку если есть одна программа обоснования, то почему не могут существовать две и даже больше?

ГЛАВА 4.

ПРОБЛЕМА ЕДИНСТВА И ЦЕЛОСТНОСТИ ПРОГРАММЫ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Основная трудность всех программ строгого обоснования математики состоит в том, что на методологическом уровне математика отличается от любого естественнонаучного знания более надежным способом обоснования своих теоретических построений, которые стабильны и в некотором смысле доказательств “внеисторичны”. Методологическая трудность обоснования современной математики, в основе которой лежит важнейшая проблема непротиворечивости аксиоматической системы, не позволяет выделить какую-либо одну из известных философско-математических программ. Поскольку, с одной стороны, аксиоматические теории содержат в себе неформализуемые аспекты, которые опираются на определенного рода очевидности, то их, вообще говоря, нельзя принять в качестве онтологически истинных без какого-либо обоснования. Но, с другой стороны, едва ли можно привести пример реального математического направления, где работающий математик очень сомневался бы в непротиворечивости своих методов исследования. Для разрешения указанных противоречий необходим «взгляд со стороны», невозможный в линейной или одномерной структуре, в которой все многообразие противоположностей сводится в одну предельную категорию “противоречия”.

Интуитивно проверка обладания некоторым свойством отличается от собирания всех объектов с данным свойством. “Критикуя канторову актуальную бесконечность различных сущностей с “реалистических” позиций, можно было бы заметить, – отмечает известный математик Ю.И. Манин, – что она абсолютизирует не столько опыт обращения с конечным, сколько повседневную физику здравого смысла, в которой мир состоит из отдельных вещей, поддающихся счету, упорядочению, собиранию и т.п.” [107, с.157]. Тем не менее, современная физика микромира совершенно не похожа на формализм канторовой программы и не сводима к последовательности “элементарных актов различия”. Предикат “быть элементом” имеет в квантовой физике довольно сомнительный статус. “Квантовая логика” не отражает логики обыденной речи, поскольку, хотя “множество” электронов состоит из разных сущностей, они все же не различимы. Это другой мир абстракций, в котором различны и зависимы, то есть дополнителны, с одной стороны, исследование и понимание, а с другой стороны, знание и интерпретация символов системы.

Естественный синтез программ обоснования является результатом тех процессов, которые сами по себе происходят в результате сознательного конструирования абстрактных систем философии и математики. Поэтому сравнение программ обоснования должно исходить как из идеи единства философии, так и из единства историко-математического познания. Прежняя научная парадигма требовала полной определенности и “безусловной объективности”, но, согласно принципу неопределенности, в процесс исследования вмешивается субъективный фактор, оставляющий нечто

существенное, даже возможно необязательно формализуемое, за рамками математической модели. Становление новой тринитарной парадигмы, принимающей вид “неформализуемой целостности”, сопряжено с серьезными психологическими и философскими трудностями. Они связаны, прежде всего, с преодолением традиционного философского “бинаризма”, который проявляется, например, в известной кантовской абсолютизации противопоставления “априорного – апостериорного”, и редукции, которая стремится свести все многообразие явлений к какой-либо одной теоретической системе. Методологическое постижение новой целостности на основе семантической формулы системной триады, показывает, что на самом деле существуют промежуточные концептуально-смысловые подходы к проблеме обоснования математики.

Вопрос о степени “естественности” и логической обоснованности такого подхода в философии математики сохраняет свою актуальность так же, как, например, обоснованность введения несчетных множеств в отношении бесконечных множеств в целом. Как заметил американский логик и философ математики Георг Крайзель, реальная математическая практика вопреки возможностям не использует всех математических методов существенным образом, поэтому “факты об ограниченности современной практики не имеют отношения к первоначальной программе Гильберта, которая занималась природой всей (возможной) математики, а не увековечиванием современных ему дефектов” [90, с.261]. Исследования в области оснований математики и математической логики, кроме расширения задач философии математики, преследуют также и важнейшие для математики общеметодологические цели. Именно они цементируют различные разделы математики в единую научную дисциплину.

Исследования по проблеме единства и целостности программ обоснования математики расширяют горизонты математики и раскрепощают математическое мышление, делая саму технологию математического знания объектом математического мышления. Еще древние говорили, что мир идет к единству и некой “сверхорганизации”. Все больше число математиков и философов математики осознает значение мудрости древних, строивших математику на двух первичных понятиях – точки и монады. Неделимость точки и актуальная бесконечность как особый акт бесконечного процесса счета лежит в основаниях математики еще со времен Евклида. Хотя непротиворечивость математической теории контролируется мысленными математическими опытами, философская платонистская установка по-своему полезна для практикующего математика, хотя математический платонизм нуждается в дополнительных программах обоснования, раскрывающих специфику новых математических объектов.

Именно в свободомыслии, присущем всему математическому творчеству, заключена неизбывная притягательность теоретико-категорных мотивов в основаниях математики, что является залогом их плодотворного будущего. Новая тринитарная парадигма в обосновании математики резонирует с теми

мировоззренческими традициями, которые отвечают собственным принципам и установкам философии математики, наполняя их новым содержанием.

4.1. “Непостижимая эффективность” реального стиля математического мышления

Математики рассматривают свое поле деятельности как некоторый особый вполне реальный мир, живущий по своим законам. Он не подчинен “физической действительности”, что делает возможным его самостоятельное изучение, хотя и непосредственно связан с ней, поскольку основная идея математического моделирования состоит в том, чтобы выводы дедуктивной модели совпадали с реальностью. То, что такой путь приводит к полезным результатам в физике, называют “принципом Вигнера”, или “непостижимой эффективностью математики в естественных науках”. С другой стороны, как заметил академик И.М. Гельфанд, “существует еще один феномен, сравнимый по непостижимости с отмеченной Вигнером непостижимой эффективностью математики в физике – это столь же непостижимая неэффективность математики в биологии” [8, с.232]. Тем не менее, указанный принцип можно рассматривать как расширение понятия “математической реальности”, которое является одной из основ психологии математического творчества. Возможно, что ответ на трудности применимости традиционных методов науки для понимания наследственности и других базовых биологических проблем содержится в высказываниях Нильса Бора. Он считал, что как физикам, пытавшимся понять поведение электрона, пришлось справляться с принципом неопределенности, точно так же биологи столкнутся с фундаментальными ограничениями, когда начнут “слишком глубоко прощупывать” живые организмы.

Можно сказать, что давать оценки эффективности – это привилегия выдающихся математиков и экспертов, но эксперты тоже, как хорошо известно, могут ошибаться. С точки зрения интуиционизма математическое доказательство должно вместе с обоснованием давать требуемое построение. Поэтому методы, дающие такое построение, Брауэр и его последователи называли эффективными. Он считал, что математическое построение – это некая сущность достаточно высокого уровня, поэтому для его обоснования недостаточно одних ссылок на практику, поскольку иногда приходится рассуждать одновременно на нескольких уровнях обоснования. Именно такой методический прием был применен при создании нестандартного анализа. В нестандартном математическом анализе “наличие идеальных объектов и неоднозначность описания чисел математическими средствами были использованы для того, чтобы расширить множество действительных чисел таким образом, чтобы все их математические свойства, не упоминающие новых чисел, остались неизменными” [124, с.124-125]. Методы анализа бесконечно малых, приведшие в XVII-XVIII веках к существенному продвижению математики, были сделаны на доступном в то время уровне обоснования. Хотя уже в XIX веке они были справедливо раскритикованы за их не строгость.

Только во второй половине XX века перепроверенные на новом уровне развития науки, они были заслуженно реабилитированы с помощью современного нестандартного анализа. Сущность математического мировоззрения характеризуется, прежде всего, тем, что математика дает возможность понимания систем, возникающих в реальном мире, которые являются реализациями общих совершенных идей, вообще говоря, недоступных человеку. Современная математика во всех своих направлениях дает возможность некоторого приближения к этим идеям. Именно в этом причина непостижимой эффективности математики в приложениях к тем наукам, которые поддаются формализации.

Трактуя цели математического развития в широком контексте, можно утверждать, что при изучении лучших образцов дедуктивных рассуждений и классики математических доказательств в человеке воспитывается не только стремление к хорошей и полноценной аргументации, но и объективность, интеллектуальная честность. Хотя математика весьма эффективна, ее выводы нуждаются в перепроверке, поскольку для разных целей требуются разные приближения. Кроме того, “непостижимая эффективность математики” состоит еще в том, что математические теории имеют более широкое смысловое содержание, чем это изначально закладывается в их аксиоматику. Практическое применение математической теории, как правило, шире, чем решение той практической задачи, с которой эта теория первоначально была связана. Феномен поразительной эффективности и богатства приложений современной алгебры в решении разнообразных прикладных задач, по компетентному мнению известного алгебраиста В.И. Янчевского, связан с защитой информации. Он считает, “что, по-видимому, одной из самых актуальных задач современного развития криптографии с открытым ключом является задача повышения стойкости и уменьшения размеров блоков данных путем усовершенствования уже существующих криптосистем. Пожалуй, самый естественный путь решения этой задачи – представление блоков информации не только в виде чисел или элементов конечных полей, но и в виде более сложных алгебраических объектов” [180, с.36]. Такими объектами оказались эллиптические кривые, то есть объекты алгебраической геометрии – одного из самых сложных разделов современной математики.

Что касается “мира абстрактной математики”, то он, как и прежде, редко бывает открыт для непосредственного восприятия, поэтому его нельзя отождествить с “миром математических идей”. Воплощение идеи в математические утверждения с допустимыми дедуктивными выводами, способными доступно передавать информацию, требует немалых сил и терпения. В определенном смысле подобного рода психологические трудности преодолевали и создатели квантовой теории. Физическая теория, описывающая квантовые частицы, появилась благодаря общефилософской концепции дополненности в теории познания, для создания которой был необходим непредвзятый и свободный взгляд. В математике, с точки зрения анализа и синтеза, можно встретить ситуации, напоминающие ситуацию в квантовой механике. Несмотря на успешное развитие современной математической

терминологии, “можно лишь сожалеть, – как замечает математик А.А. Бейлинсон, – что история математики не знала человека, подобного Бору” [16, с.162]. Речь идет о том, что характеристики людей, даже культур и цивилизаций, с точки зрения их целостности, требуют типично дополнительных способов описания, поэтому развитие терминологии показывает, что мы имеем дело не с “туманными ” и “непонятными” аналогиями, а с определенными принципами логической связи.

Наиболее полно суть принципа дополнительности сформулирована в одной из посмертных работ Нильса Бора: “Невозможность объединения наблюдаемых при разных условиях опыта явлений в одну-единственную картину ведет к рассмотрению таких по-видимости противоречивых явлений как дополнительных в том смысле, что они – взятые совместно – исчерпывают все доступные определению сведения об атомных объектах” [169, с.119]. Дополнительность, по замыслу Бора, – это необходимость взаимоисключающих, с точки зрения классической физики, двух систем описания, каждая из которых не может быть объявлена “более правильной”. В этой концепции для математиков существенно то, что классическими системами описания достигается определенное понимание неклассической сути явления. Перенос “дуализма Бора” на другие области знания требует определенного логического обоснования такого способа описания. Заметим, что при онтологическом обосновании “логики дополнительности” речь идет, прежде всего, об особенностях существования объектов познания, а при гносеологическом обосновании – чаще всего об особенностях познания соответствующих объектов. С точки зрения математического формализма факт корреляции взаимно дополнительных характеристик проявляется в отсутствии коммутируемости соответствующих операторов, то есть эти операторы неперестановочны между собой. Поэтому конечный результат зависит и от порядка действия указанных операторов.

Специфика математического метода состоит в том, что процесс дедуктивного вывода не поддается прямому сопоставлению с описываемой реальностью, кроме того, для большей части математического символизма не существует ни материальных объектов, ни физических процессов. Для развития математики важна идея единства математики. “Идеи, которые оказываются весьма плодотворными в решении одной проблемы, часто заимствованы из других разделов математики, – пишет французский математик Жан Дьедонне, – что делает очевидным глубокое единство математики и с другой стороны – поверхностное и устарелое ее деление на алгебру, геометрию и анализ” [58, с.12]. Даже если мы не можем понять мир математики до конца, то эта невозможность понимания компенсируется бинарной дополнительностью точек зрения на “возможные миры”. Выражение “возможные миры”, введенное немецким математиком, физиком и философом Готфридом Лейбницем, является общепринятым в философских учениях. Оно предполагает миры, отличные от нашего, состоящие из возможных событий, образующих системную целостность, то есть “мир”. Задача науки, считал Исаак Ньютон, состоит в том, чтобы раскрывать блистательные замыслы творца. Подобно

Ньютоном, Лейбниц рассматривал свою разнообразную деятельность как возложенную на ученых божественную миссию.

Известный французский математик Александр Гротендик сказал о них так: “Иногда думаешь: счастье, что такие люди, как Ньютон, Лейбниц, ... имели возможность творить свободно, не оглядываясь на каноны” [48, с.108]. В XVII столетии Лейбниц фантазировал о логической системе, столь всеобъемлющей, что она могла бы решить не только математические, но также философские и моральные проблемы. Мечта Лейбница дожила до наших дней, и именно ей современная логика обязана своим возникновением. Идея превращения логики в математическую науку появилась в работах Лейбница, когда традиционная задача математики: “заменить вычисления рассуждениями” была инвертирована в задачу математической логики: “заменить рассуждения вычислениями”. Отличаясь уникальной разносторонностью, Готфрид Лейбниц, как Рене Декарт и Блез Паскаль, был не только математиком, но и выдающимся философом. В понимании взаимодействия наук Лейбниц исходил из мирового единства, обязанного своему божественному происхождению, и существования невидимых духовных тел “монад” или “душ”, заполняющих все пространство. Безграничные и единообразные души одновременно и незавершенны, и многообразны в своих выражениях и представлениях, что является, по Лейбницу, следствием нашего “земного” несовершенства и недостаточности, поскольку лишь “небесное” совершенно и завершено.

Боровское понятие индивидуальности, которое проявляется в дополнительном характере описания атомных явлений, по мнению философа И.С. Алексеева, “обнаруживает близкую аналогию с лейбницеvским понятием монады” [3, с.99]. Методологические приемы Лейбница сыграли определенную эвристическую роль в его математических исследованиях, в том числе и в открытии исчисления бесконечно малых. Путь к современному математическому анализу был открыт тогда, когда, как сказали Бурбаки, “повернувшись спиной к прошлому”, Ньютон и Лейбниц искали оправдание новым методам не в строгих доказательствах, а в согласованности разнообразных результатов. Достижения Готфрида Лейбница, как и Рене Декарта, особенно значительны в усовершенствовании математического аппарата и понимании единства математики, хотя их подходы к “согласованности математики” существенно различались. Декарт стремился сделать алгебру основной математической наукой, против чего довольно энергично выступал Лейбниц, создававший свою универсальную математику на широкой основе, близкой к современной. Универсальная математика, считал он, является “логикой воображения” и должна заниматься всем, что в области воображения поддается точным определениям. Предвосхищая будущее развитие математики, он, уточняя согласованность отдельных математических наук, выделил фундаментальное понятие изоморфизма, которое назвал “подобием”. Его понимание сущности и общности математики было по достоинству оценено только в середине XIX века, когда стало возможным переходить от одних теорий или моделей к другим адекватным изменением терминологии.

Обнаружение изоморфизма между двумя известными структурами большая удача для математика. Это еще один шаг в теории математического познания, поскольку именно такие открытия не только порождают новое “значение”, но и способствуют поискам нетривиальных путей развития математики. Изоморфизмы бывают самых разных типов, поэтому не всегда ясно, с чем мы имеем дело. В широком понимании слову “изоморфизм”, как и вообще всем словам, присуща некоторая расплывчатость, что, однако, является одновременно и его достоинством, и его недостатком. “Понятие изоморфизма относительно: говорить об абсолютном изоморфизме систем – значит входить в противоречие с диалектическим принципом всеобщего развития и изменения” [179, с.81]. Если отказаться от требования взаимной однозначности элементов и отношений, то мы приходим к понятию гомоморфизма, которое является обобщением изоморфизма. В математике разработана специальная технология, называемая моделированием, которая, в применении к “реальному миру”, может быть полезной, а иногда может приводить к самообману. Поскольку отдельные факты известны только с некоторой долей вероятности или с некоторой точностью, то любой модели присуща идеализация, согласно которой эти факты признаются верными и принимаются за “аксиомы”. Наряду с такими вопросами, как непротиворечивость и полнота рассматриваемой аксиоматики, приходится исследовать и область ее задания. Такая область, точнее совокупность таких объектов и таких отношений, которая удовлетворяет всем требованиям рассматриваемой системы аксиом, называется моделью этой системы. В широком понимании модель – это множество элементов, находящихся в некоторых отношениях друг с другом. В частности, модели аксиоматических теорий множеств дают теоретико-множественную интерпретацию этой аксиоматики.

Система аксиом называется совместной, если она имеет модель. Совместность системы аксиом является достаточным условием ее непротиворечивости. Это теорема математической логики. Поскольку модели отражают существующие объекты и процессы с помощью аналогий, гомоморфизма или изоморфизма, то в гносеологическом смысле неясно, какая модель, например, для аксиом геометрии будет для нас более убедительной. Такие математические объекты, как точки, прямые, плоскости, не присутствуют в окружающем нас пространстве как реальные физические объекты. Они существуют лишь как мысленные объекты, поэтому вопрос о непротиворечивости исследуемой аксиоматики должен решаться без обращения к этим объектам. Их онтологическая сущность, их право на существование как раз и вытекает из непротиворечивости. Кроме того, для интерпретации большей части важных для математики систем понятий необходимы бесконечные модели, но такие описания могут содержать скрытые противоречия. Поэтому, предъявляя мысленную конструкцию, состоящую из бесконечного числа элементов, мы должны ответить на вопрос: законно ли мы оперируем с мысленными представлениями и не приведет ли это к противоречию или неясности? “Ответить на этот “проклятый вопрос” исчерпывающим образом, скорее всего, невозможно”, – считает математик и

логик В.А. Успенский [162, с.28]. Тем не менее, математики пользуются такими представлениями, если многовековая практика их использования до сих пор не приводила к противоречию. Хотя, по мнению некоторых физиков, математика – это единственный способ понять реальность, возможно, что когда-нибудь ученые при моделировании будут меньше зависеть от математики и будут черпать метафоры и аналогии из новых источников.

Ни в какой реальной деятельности невозможно полностью полагаться на математические дедукции. Небольшое изменение аксиом, в которых мы окончательно не уверены, способно, вообще говоря, привести к другим выводам, даже малое изменение параметров изучаемых явлений может совершенно изменить результат. Но дополнительное объяснение не может быть чем-то инвариантным и общим для всех моделей теории, содержащих объяснение. Это реакция на попытки рациональной интерпретации теории и еще одно подтверждение обоснованности разговора об “иррационализме” математики. В чем же тогда состоит прогрессивный характер развития математики? На интуитивном уровне понятно, что он присущ математике, по крайней мере в Новое время. Иногда прогресс математики трактуют как рост “важного математического знания”, которое эффективно служит широким целям математической практики, в том числе и для самих математических теорий. Проблема в том, что определить эффективность использования нового знания можно только спустя какое-то время, иногда довольно значительное, а с другой стороны, оценка эффективности, как правило, не легче чем оценка важности. Например, “на практике приходится иметь дело и с такими случаями, когда неизвестны законы, позволяющие составить дифференциальное уравнение, и поэтому необходимо прибегать к различным предположениям (гипотезам)” [4, с.6]. Введение новых средств в математике важно, прежде всего, для ее развития, поэтому определение новых понятий это не просто “сокращения”. Вообще говоря, всегда существовало и существует глубокое различие между тем, что можно сделать в математической теории в принципе, и тем, что можно реализовать на практике.

Поэтому не только удачные обозначения, как, например, арабские позиционные выражения для цифр, но и принципиально новые подходы к уже известным понятиям могут существенно расширить границы практических возможностей применения математического формализма. Например, квант теории информации – это бинарная единица, или бит, который является посланием, представляющим вариант выбора: да или нет, ноль или единица. В великих открытиях не всегда удается провести грань между теоретическим и практическим. Речь идет о знакомстве Готфрида Лейбница с двоичной системой древнекитайской математики, в понимании важности которой проявилась органичная связь Лейбница-философа и Лейбница-математика. Для подлинного признания этого открытия, в котором он увидел “Образ творения” и указал на применимость двоичного исчисления для счетных машин, необходимо не только понять, но и осознать, что было известно о системе знаков до Лейбница. В новогоднем послании герцогу Рудольфу-Августу он назвал свое открытие “Тайной творения”, так как одним из основных пунктов

христианской веры является творение Всемогущим Господом всех вещей из ничего. Теологическая аргументация идеи творения из ничего опирается на то, что Бог не был бы столь велик, если бы использовал уже имеющийся материал и был бы похож на “мастерового человека”. Величие Бога в том, что он творит из ничего. Возникновение чисел, представленное Лейбницем с помощью нулей и единиц, то есть, как он говорил, ничем, выразит это как ничто другое на свете наилучшим образом. Великие мыслители прошлого были озабочены секретами искусства правильного понимания. Лейбницево искусство хорошо рассуждать состоит в следующих максимах:

1. Истинным следует всегда признавать лишь столь очевидное, в чем невозможно было бы найти ничего, что давало бы какой-либо повод для сомнения...

2. Если нет возможности достичь такой уверенности, приходится довольствоваться вероятностью в ожидании большей осведомленности...

3. Для того чтобы выводить одну истину из другой, следует сохранять их некоторое неразрывное сцепление...

Эти правила наряду с максимами искусства открытия содержатся в работе Лейбница “О мудрости”. Как утверждал в своей работе Лейбниц, все, что служит руководством для укрепления духа, достойно существования и нашего пристального внимания. Подобно тому, как искусство состоит не только из произведений искусства, но и из “художественного духа”, так и наука не только накапливает знания, но и создает новые “типы восприятия”. Расширение восприятия – важнейшая функция науки и искусства. Есть что-то такое в познании, чего нельзя знать окончательно конечному человеку. Точнее сказать, нельзя узнать заранее. Популярный философ М.К. Мамардашвили связывал с этим проблему бесконечности. Для формулирования суждений о мире мы “охватываем” бесконечность “гипотетическим интеллектом”.

Чтобы проверить математическое суждение с бесконечной операцией, математики предполагают, что та или иная операция может быть повторена бесконечное число раз, хотя проделать этого никто не может, то есть такая процедура рассматривается в завершенном, актуально бесконечном виде. При этом мы рассуждаем о математических формализмах, например, числах, последовательностях, многообразиях, но, на первый взгляд, ничего не говорим о наблюдении или о сознании в математике. Однако и за формальными математическими системами стоят определенные интуитивные принципы доказательства. Математики пытаются по возможности не предполагать существования “абсолютного мира”, который можно было бы считать основанным на “бесконечном разуме”. Например, абсолютный мир натуральных чисел не является столь уж сложным понятием, даже без включения в него понятия множества, а для бесконечного разума он вообще ясен и понятен. Согласно Блезу Паскалю противоречивый характер человеческого существа изначально “двойственен”. Конечный человек у Паскаля бесконечен в своих мыслях и стремлениях, отражающих противоречия его жизни и существа. В математику понятие бесконечности проникло в связи с открытием несоизмеримых величин. Даже если рассуждения древних греков о

бесконечном были вполне для них удовлетворительными, они все равно пытались обойтись без них, поскольку сама идея бесконечности приводила их в сильнейшее замешательство. Затруднения, возникающие при использовании абстрактных понятий бесконечного и непрерывного того времени, противоположных понятиям конечного и дискретного, проявились в парадоксах Зенона Элейского, которые до сих пор привлекают внимание философов и математиков. Критический рационализм Зенона породил творческий рационализм в науке.

Отношение к бесконечным множествам всегда было критерием размежевания математиков. Знаменитые логические парадоксы и антиномии никогда не играли заметной роли в чистой математике и тем более они были далеки от проблем прикладной математики потому, что они не имели ничего общего с обычно используемыми в математике рассуждениями. По этой причине парадоксы Зенона не производили на математиков впечатления “демонстрации серьезных трудностей”, ради чего собственно они и были придуманы. Трудности такого рода можно отнести к исторической стадии развития понятия формальной системы. “Я склонен считать, – говорит американский математик Пол Коэн, – что многие из этих проблем исторически связаны с переходным периодом от классической философии к нынешней математике” [88, с.170]. Хорошей рекомендацией метода, с точки зрения математики, является множество интересных и содержательных теорем, которые можно доказать с помощью этого метода. Поэтому традиционная реакция математиков на появление противоречия в связи с применением какого-нибудь метода состоит в анализе всех шагов, приводящих к нему. После чего все доказательства, содержащие подобные шаги, объявляются недостоверными, если их нельзя исправить с помощью новых методов. Новая математическая методология проявилась в новоевропейской науке XVII столетия при работе с формальными актуально бесконечными объектами, например, рядами и интегралами. Наиболее плодотворным для современной математики оказался подход немецкого математика Георга Кантора, согласно которому актуальная бесконечность принимается как существующая в природе и используется как инструмент математического познания.

Важнейшим этапом в процессе онтологизации математических сущностей можно считать конец XIX века. Это было время создания Георгом Кантором теоретико-множественных представлений, официальное провозглашение которых фундаментом математики содержалось в речи Жака Адамара на I Международном конгрессе математиков в Цюрихе (1897). Создание теории множеств отразилось, прежде всего, на методологических проблемах обоснования математики. Важнейшей из них был отказ от прежних форм мышления и переход от вычислений к рассуждениям. Этот переход, в другом контексте начатый в работах Лейбница, неожиданно для традиционного мышления того времени, наиболее полно был представлен в работах Кантора. В них по существу почти полностью отсутствуют элементы вычислений, а используемые символы – это скорее аналоги опорных этапов логических рассуждений. С другой стороны, теория множеств воплощала в себе

невиданную до того в истории математики степень абстрактности новой математической дисциплины, которая по степени общности сравнивалась с логикой, но в отличие от последней оперировала с бесконечными классами объектов. Хотя при этом нарушались многие привычные для математиков нормы мышления. Например, высказывание “целое больше своей части” теряло свой прежний смысл. Созданная Кантором теория множеств претендовала на построение оснований всей математики. Она породила новые парадоксы в математике начала XX века. Необходимо тщательно различать математические и метаматематические предложения, чтобы не прийти к парадоксам.

Самый ранний из них принадлежит Эпимениду. В качестве примера парадоксов канторовской теории множеств чаще всего приводится антиномия Рассела, возникшая внутри самой математики. В ней идет речь о том, что множество тех множеств, которые не являются собственными элементами, содержит само себя тогда и только тогда, когда оно не содержит себя. Важность теоретико-множественных противоречий иногда сильно преувеличивают. Например, парадокс Рассела имеет аналогию в арифметике, если предположить, что существует самое большое целое число. Рассел открыл свой знаменитый парадокс, размышляя над диагональной процедурой Кантора. Даже формулировку своего парадокса в “Принципах математики” (1903) он облек в форму, заимствованную из диагонального аргумента. Математики и логики искали спасение в аксиоматизации, а философы, в духе старого вопроса Канта о принципиальной возможности того или иного понимания, обратились к общей теории познания. Но, как справедливо заметил американский популяризатор математики Грегори Чейтин, “некоторые математические факты не удастся втиснуть в теорию, потому, что они слишком сложны” [172, с.40]. Заметим, что связь математики и философии для Кантора, в отличие от многих математиков XIX века, была вполне естественной. Он даже привлекал теологическое оправдание для теории множеств и придерживался платоновских представлений в понимании науки. Отметим, что в теологии сложились две традиции, которые противоречат и вместе с тем дополняют друг друга. В одной из них утверждаются за Богом предикаты положительного существования, а в другой они отрицаются.

Фактически психологией работающих математиков, отвлекающихся от “отражающего аспекта модели” и умеющих погружаться в мир разрабатываемых теорий, является платонизм. Психология человека такова, что придуманные им структуры он считает атрибутами самого мира, что является источником многих конфликтов нашего времени. В генезисе математических структур важно понять активную роль субъекта. Рассматривая математические структуры как продукты мысли, математику можно исследовать и в контексте активности по созданию таких структур, опирающихся на глубинные структуры психики. Даже “чувственный образ множества” возник в математике благодаря нашей способности мыслить совокупность как единое целое. Математические структуры обладают той уникальной и отличительной способностью, что, будучи однажды сформулированными, они могут логически развиваться без дальнейшего обращения к действительному миру. В качестве

примера можно рассмотреть формирование понятия интеграла Лебега, которое не было связано с целью изучения материальной действительности, а происходило по внутренним, чисто математическим причинам. Действительно, для инженерных и физических проблем того времени было достаточным то определение интеграла, которое было дано французским математиком Огюстеном Коши и немецким математиком Бернардом Риманом. Французский математик Анри Лебег ввел новое понятие интеграла, решая математическую задачу о наиболее общем классе функций, в котором сохраняется связь между производной и первообразной, определяемая формулой Ньютона-Лейбница.

Отметим, что сам Лебег считал, что математика – это “внутренняя наука” рождающаяся и развивающаяся от “столкновения ума с умом”, а вне человечества ее вообще не существует. Затем венгерский математик Фридьеш Рисс указал на существенную роль интеграла Лебега при доказательстве полноты класса интегрируемых функций как метрического пространства. В итоге интеграл Лебега понадобился и физикам, например, при обосновании квантовой механики, а многие другие математические понятия так и не вышли за пределы математики. Считается общепринятым, что математике присущи следующие три характерные черты, отличающие ее от других наук. Во-первых, все используемые понятия строго определяются, во-вторых, все утверждения строго доказываются из аксиом, в-третьих, математика сложна и непонятна в такой вызывающей уважительный трепет степени, какая недоступна ни одной другой науке. Глубоко размышляя на темы философии математики, В.А. Успенский рассматривает такие характеристики математического доказательства как убеждение в истинности и доверие к доказательству: “Откуда же у математика берется убеждение, что доказанные теоремы, доказательства которых он так никогда и не узнает, действительно являются доказанными, то есть располагают доказательствами?” [161, с.147]. Поэтому можно даже утверждать, что современная математика в значительной мере и сложное социокультурное явление.

Говоря об опасности, к которой приближает человечество технологическая цивилизация, и о той роли, которую играет в этом строгая наука с идеологией “духа математизации”, академик И.Р. Шафаревич указывает на ту сторону математики, которая “глубоко связана с эстетическим чувством” и способна служить в некотором смысле неким противовесом наметившейся тенденции абсолютизации “алгоритмического машинообразного мышления” [174, с.78]. Французский математик Анри Пуанкаре в работе “Математическое творчество” говорил о том, что математическое рассуждение имеет “род творческой силы” и тем отличается от цепи силлогизмов. Пуанкаре в отличие от Гильберта не верил в формализацию всей математики. Эта проблема была предметом интересной дискуссии в начале XX века между Гильбертом и Пуанкаре. И только после теоремы Гёделя о неполноте стало ясно, что, по-видимому, в этом споре позиция Пуанкаре выглядит достаточно убедительно. Анри Пуанкаре, способствовавший появлению новых взглядов в обосновании математики, был одним из наиболее крупных математиков периода безраздельного господства классической математики. Его подход к философским проблемам науки и

методологии научного познания, опирающийся на его опыт построения одной из евклидовых моделей для неевклидовой геометрии, можно считать реакцией на математический платонизм. Философская доктрина Пуанкаре получила название “конвенционализма”. Основные положения и принципы научной теории, с точки зрения этого направления, не являются ни априорными синтетическими истинами, как, например, у Канта, ни моделями и отражениями объективной реальности, а суть соглашения, единственным необходимым условием которых является непротиворечивость.

Свобода выбора соответствующих теорий ограничена, с одной стороны, практикой их применения, а с другой стороны, потребностью нашей мысли к максимальной простоте и эффективности теории. Заметим что, размышляя о самой себе, математика размышляет и о возможностях человеческого ума. Соглашаясь с философами в том, что, выигрывая в строгости, математика может потерять в объективности, Анри Пуанкаре в работе “Ценность науки” развил это общее утверждение следующим образом: “Сделавшись строгой, математическая наука получает искусственный характер, который поражает всех; она забывает свое историческое происхождение; видно, как вопросы могут разрешаться, но уже не видно больше, как и почему они ставятся” [147, с.213]. Если бы математика была лишь собранием силлогизмов, она была бы доступна всем – для этого нужна лишь хорошая память, а большинству людей математика дается с трудом. Поэтому “наука доказывать не есть еще вся наука”, считал Пуанкаре, и интуиция должна дополнять логику, как ее “противовес и противоядие”. Традиционные ассоциации во многом исходят из противопоставления логики и интуиции, но с развитием первой для этого остается все меньше оснований. Хотя математические структуры обладают определенной внутренней красотой, поэтому чтобы понимать математику, надо научиться видеть эту красоту, а это требует незаурядных эстетических способностей. Отметим также, что сами эстетические суждения тоже имеют двойственную функцию: в качестве посредников между пониманием и разумом и в качестве уравнивающей силы между кантовскими антиномиями разума.

Для математической мысли характерно то, что она не выражает истину о внешнем мире, а связана с нашими умственными построениями. Поэтому никогда нельзя быть вполне уверенным в том, что нас поняли без ошибок. Это свойственно и другим способам познания. Поэтому, если кто-то считает математику по этой причине догматичной, то тогда придется назвать догматичным любое рассуждение. Тем не менее, в претензиях на то, что умственные построения, опирающиеся на математическую интуицию, представляют объективную ценность, усматривали иногда не только догматические, но даже и теологические элементы. В первоначальных фазах развития истории науки социальные факторы непосредственно вытекали из человеческой природы, поэтому их можно было выводить, не прибегая к глубокому философскому анализу. Важнейшим следствием переосмысления математического знания в конце XIX века стало провозглашение ряда крупных философско-математических концепций и программ. Первой такой концепцией

была “теоретико-множественная” программа немецкого математика Георга Кантора, которая базировалась на его учении о множествах и развитии идеи актуальной бесконечности. Сам Кантор подчеркивал, что к идее введения актуальной бесконечности в математику он пришел, конфликтуя с ценностными для него традициями. Канторовские теоретико-множественные построения по существу актуализировали старую философскую проблему: может ли человеческий ум мыслить бесконечное?

Трудами немецких математиков Карла Вейерштрасса, Рихарда Дедекинда и итальянского математика Джузеппе Пеано, а также других выдающихся математиков, к концу XIX века были определенным образом уточнены основы классического математического анализа. Большое значение для реализации этого уточнения имели работы Кантора по теории множеств, которые представлялись в то время естественным фундаментом грандиозного здания математики. Этот проект казался настолько успешным, что Анри Пуанкаре заявил даже о том, что в математике достигнута “абсолютная строгость”. В рамках теоретико-множественной программы все без исключения математические объекты должны были определяться как множества, удовлетворяющие определенным условиям, а рассуждения об этих объектах должны были проводиться по правилам аристотелевской логики. Последняя включает в себя “закон исключенного третьего”, а значит, метод рассуждения “от противного”, и, следовательно, доказываемые на его основе принципиально неконструктивные “чистые” теоремы существования. В самом начале XX века с критикой программы Кантора выступил голландский математик Лейтзен Брауэр, поставивший себе целью освободить математику от трудностей, связанных с канторовским учением. Свою программу он назвал “интуиционистской”, в связи с тем, что предложил строить математику на основе интуитивно ясных и потенциально осуществимых “умственных” рассуждений, не пользуясь при этом представлением о “множестве”. Именно Брауэру неклассическая наука обязана выдающимся открытием, совершившим переворот в такой, казалось бы незыблемой и устоявшейся, науке, как логика. Он обнаружил, что при интуиционистском подходе к его построениям закон исключенного третьего и метод от противного утрачивают традиционно приписываемый им статус “общелогических норм”.

По существу это был еще один путь в развитии математического знания, дополнительный по отношению к классическому математическому обоснованию, а в науке о способах умозаключений рядом с классической логикой стала новая, интуиционистская логика. Каждая из этих и других программ открывала определенное направление в развитии математики. Выделим среди них программу “теории доказательств” Давида Гильберта, относящуюся к формальной математике, основной задачей которой являлось доказательство непротиворечивости аксиоматизируемой математики. Заметим, что им была предпринята одна из наиболее известных и продуктивных попыток предсказать пути развития математики с помощью постановки важнейших нерешенных математических проблем в 1900 году на Международном математическом конгрессе в Париже. “Сегодня уже ясно, – утверждает историк

математики С.С. Демидов, – что выбор Гильберта в основном оказался верным” [50, с.145]. Поэтому, по-видимому, преждевременно говорить об ограниченности аксиоматизации, поскольку границы ее применимости, с точки зрения работающих математиков, возможно, совпадают с границами применимости самой математики.

После фундаментальных открытий Курта Гёделя можно считать общепризнанным, что проблема обоснования математики все еще не решена. С точки зрения эпистемологии следует разделять оправдание математики через ее использование и обоснование. В этом одно из существенных отличий математики от других наук, в том смысле, что вопрос о ее обосновании не может быть решен только на аргументах опыта. Основная трудность заключена в отсутствии однозначного восприятия самого понятия “обоснования”, а также в разногласиях по поводу допустимых логик. Для понимания сущности современной математики необходимо глубже понять природу математического мышления. Математики уже сталкивались с подобной философско-методологической проблемой, когда длительное неприятие неевклидовых геометрий было обусловлено не наличием математических ошибок, а определенными философскими представлениями. Поэтому и сегодня любой математик, защищающий “классическую” строгость, найдет немало союзников своей правоты. Что можно сказать сегодня об исторической перспективе развития математики? Вряд ли кто возьмется ответить сегодня на этот вопрос так, как это сделал на рубеже XX столетия Давид Гильберт.

Не вызывает сомнения то, что математика XXI века будет не только сложнее и абстрактнее, но и новые методологические подходы будут, возможно, выходить за границы сегодняшних представлений. Но чтобы понять будущее, как показывает практика, надо переосмыслить с современных позиций борьбу методологий и философских мировоззрений прошлого. Еще до теоремы Гёделя о неполноте математики заметили, что понятия “существовать” и “построить” стали заметно различаться, то есть появились “чистые” теоремы существования, в которых нет построения объекта, чье существование доказывается. С точки зрения конструктивистов им бы больше подошло название “нечистых”. Одно время казалось, что соответствующие трудности обусловлены аксиомой выбора, и это было действительно справедливое обвинение. Однако принципиально другой подход к рассмотрению этой проблемы предложил Лейтзен Брауэр. Критически анализируя идеи Бертрана Рассела о сведении математики к логике, он пытался доказать, что математика не только не зависит от логики, и даже, более того, логика зависит от математики. Поддерживая Анри Пуанкаре в критике абстракции актуальной бесконечности, он отмечал в то же время ее ограниченность.

Нужно либо полностью отказаться от бесконечных совокупностей объектов, либо перейти к другой логике, либо признать идеальный характер математических утверждений без какого-либо содержательного смысла. После публикации диссертации Брауэра “Об основании математики” (1907) и статьи с полемическим названием “О недостоверности логических принципов” (1908) в математике и логике появилось новое направление – “интуиционизм”. Новая

логика, по мнению Брауэра, интуитивно понятнее, чем классическая, поскольку описывает математические утверждения не как абстрактную истину и ложь, а как предложения о возможности выполнить некоторое “умственное построение”. Математическое доказательство в этом контексте состоит из соответствующего конструктивного построения с помощью эффективных методов и его обоснования. Основой интуиционистской философии математики является натурфилософия бесконечного. “Суть ее в том, – считает философ математики В.Я. Перминов, – что человек практически не имеет дела с бесконечностью, а следовательно, и не может мыслить о бесконечности, не теряя достоверности” [136, с.131]. Поскольку адекватных понятий для выражения новых методологических идей в европейской науке в те времена еще не было выработано, например, тогда не существовало точного понятия алгоритма, то Брауэр сослался на интуицию, как “инструмент” понимания новых математических сущностей.

Учитывая роль конструкций в предлагаемой модификации математики и логики, он употреблял также и другое название – конструктивная логика и математика. Затем эти термины разошлись, в частности, конструктивизмом стали характеризовать направление в математике, отдающее приоритет понятию задачи и конструкции, а не истины и обоснования. С точки зрения интуиционизма, некоторые объекты математики и некоторые операции безусловно ясны во всех своих свойствах. Здесь можно проследить связь с философией Канта, его теорией “чистого созерцания”, универсального и непогрешимого. Центральная идея интуиционизма заключается в конструктивном понимании утверждений о существовании математических объектов. Для Брауэра математика была скорее “умственной деятельностью”, чем наукой, которую все-таки можно изучать научными методами. Поэтому математические построения он считал необходимым исследовать “как таковые”, не интересуясь “метафизической” природой конструируемых объектов и их независимостью от нашего знания о них.

Тезис Брауэра “существовать – значит быть построенным” (разумеется, потенциально), произвел огромное впечатление на его современников. Из этого тезиса о доказательстве экзистенциального высказывания вытекают все ограничения, налагаемые интуиционизмом на допустимые методы математики. Объекты в интуиционистской математике, не удовлетворяющие требованию конструктивности, например, бесконечные множества, взятые в качестве законченных, объявляются “несуществующими”. Основным конструктивным объектом своей математической теории интуиционисты считали понятие “свободно становящейся последовательности”. Во многих случаях встречающиеся в математике колоссальные числа не рассматриваются с количественной точки зрения. Хотя, имея дело с подобными системами, математики убеждены в их непротиворечивости, если только этому не препятствуют какие-нибудь дополнительные теоретические соображения.

Математики полностью игнорируют “незавершенность” человеческого знания и “незавершенность” или, как говорил Брауэр, “становящийся характер” многих математических объектов. Например, иррациональное число

рассматривалось не как процесс получения все более точных приближений, а как уже существующая бесконечная десятичная дробь. Вопрос об экзистенциальных математических высказываниях, то есть о высказываниях, утверждающих существование математических объектов, представляет интерес не только в связи с проблемами, поднятыми в программе Брауэра. С такой же остротой он стоит и в физических теориях, так понятие “формального существования элементарных частиц” приобретает смысл в рамках определенной теоретической системы или, как принято сейчас говорить, парадигмы, используемой для описания природы. Описание мира, предлагаемое физикой, является приближенным или феноменологическим. Если для каких-то целей физики используют какую-то новую математическую структуру, то веру в ее непротиворечивость они обретают изначально из ее употребления. Но, с точки зрения математики, проблема непротиворечивости этим не решается, а только ставится.

Математики постараются включить эту структуру в уже существующую систему математического знания и дать ей некую интерпретацию в терминах уже разработанных теорий, то есть провести математическое обоснование теории, результаты которого мало зависят от ее успешного применения. Кроме того, физик-теоретик И.Ю. Кобзарев и математик Ю.И. Манин обращают внимание на следующую трудность: “В математизированной теории зачастую оказывается, что переход к теории нового уровня влечет полную смену основных математических структур, используемых в описании” [82, с.85]. Так, например, по их мнению, суть специальной теории относительности не в систематическом способе вычисления малых релятивистских поправок к классическим законам движения, а в том, что она вводит группу Пуанкаре в качестве основной группы пространственно-временных симметрий физики. В то же время, описание состояний как векторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве в квантовой теории и представление измеримых наблюдаемых эрмитовыми операторами в этом пространстве, то есть использование понятий функционального анализа, вообще не имеют аналогов в предшествующей физической парадигме. Поэтому, вообще говоря, неверно представление о том, что теоремы Гёделя о неполноте перенесли обоснование математики исключительно в практическую область, как обоснование в опыте, по аналогии с физикой.

С точки зрения реалистических взглядов на математические объекты, конструктивный тезис Брауэра дал новый подход к известному со времен Зенона Элейского концептуальному противоречию в математической модели пространства, предполагающей существование точек и вместе с тем бесконечную делимость пространства. Брауэр показал, что точки вводить необязательно. В частности, существование точек ставит под сомнение апория “Стрела”, а бесконечную делимость пространства – апория “Ахиллес и черепаха”. На самом деле “движение” Ахиллеса и черепахи достаточно наглядно в геометрических построениях. “Однако, поскольку Зенон представил эту проблему в терминах взаимнооднозначного соответствия в арифметико-алгебраическом (понятийном) языке, – замечает американский философ

математики Джоанг Фанг, – описание состояния превратилось в парадокс или, по крайней мере, – в апорию” [164, с.8]. Схожую проблему представляет собой восприятие иррационального числа $\sqrt{2}$. Геометрическое изображение диагонали квадрата со стороной, равной единице, не представляет труда для любого человека, но совсем другое дело – вычисление этой диагонали на “арифметико-алгебраическом” языке.

Интуиционистское понимание доказательства истинности суждения всегда предполагает, что можно извлечь способ построения объектов, существование которых утверждается. Например, не удовлетворяющее интуиционистским канонам доказательство того, что существуют два иррациональных действительных числа a и b такие, что a^b рационально, использует разбор случаев: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ – рационально, тогда $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, и $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ – иррационально, тогда $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Это короткое, но неэффективное рассуждение “чистого” существования, которое характерно для классической математики. Другое доказательство, позволяющее исключить неэффективный разбор случаев, несравненно сложнее, поскольку использует глубокий результат советского математика А.О. Гельфонда, что из иррациональности $\sqrt{2}$ следует трансцендентность и, следовательно, иррациональность $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Его основное отличие в том, что “если утверждается существование конструкции, то предполагается, что онтологически имеется потенциально осуществимый процесс построения этой конструкции” [57, с.15]. В математической и философской литературе исследована гипотеза Брауэра о “законе исключенного третьего” как источнике парадоксов в теории множеств. Принцип исключенного третьего для конечных совокупностей, в интерпретации Давида Гильберта, формулируется следующим образом: либо все предметы обладают определенным свойством, либо существует предмет, который этим свойством не обладает.

В математике обычно предполагалось, что эта альтернатива остается в силе без каких-либо ограничений и в случае бесконечного числа математических сущностей. В соответствии с программой Брауэра с дизъюнкцией, то есть высказыванием вида $\langle\langle A \text{ или } B \rangle\rangle$, связывалась задача определения потенциально верного члена этой пары, а отрицание A , то есть высказывание вида $\langle\langle \text{не } A \rangle\rangle$, означало бы доказательство неразрешимости задачи, связанной с A . Соответственно, высказывание вида $\langle\langle A \text{ или не } A \rangle\rangle$ состояло в решении задачи, связанной с A , или доказательстве ее неразрешимости. Например, пока теорема Ферма не была доказана, интуиционист не мог утверждать, что проблема Ферма имеет положительное решение или имеет отрицательное решение, поэтому пока проблема Ферма не была решена, эта дизъюнкция считалась неправомерной. Таким образом, в интуиционистском понимании математических высказываний утрачивал свой универсальный статус логического принципа, то есть верного в любом конкретном случае, важнейший закон аристотелевской логики – “закон исключенного третьего”.

В классической математике понятия “утверждения” и “отрицания” дополняют друг друга, в том смысле, что отрицание истины есть ложь, а отрицание лжи есть истина, в результате чего двойное отрицание возвращало все на исходную позицию. Даже при конструктивном определении математического существования такая симметрия могла быть сохранена, если бы отрицание было бы определено как невозможность построения. Однако, по Брауэру, отрицание – это по существу доказательство абсурдности самого предположения о возможности существования этого объекта. Это принципиально “неклассический” подход, по отношению к классической дихотомии истинности и ложности. Нуждается ли современная математика в опровержении закона исключенного третьего? В контексте интуиционистской логики эта проблема сводится к пониманию утверждения и его отрицания с точки зрения логики математического мышления и, в итоге, к философской проблеме назначения и сущности математики. Анализируя этот вопрос, В.Я. Перминов пришел к выводу, что “требование содержательности не проистекает из функции математики и не может определять логику математического мышления” [137, с.206]. В защиту Брауэра заметим, что закон исключенного третьего экстраполирован на бесконечные совокупности, исходя из его понимания в конечных ситуациях, а многие свойства конечных множеств не выполняются для бесконечных множеств, хотя бы такое, что всякая собственная часть меньше целого. Кроме того, применение закона исключенного третьего к конечным множествам с большим числом элементов может привести к неконструктивным доказательствам существования.

Понятие “бесконечного” для нас всегда окрашено сознанием или пафосом неизвестного. Как говорил Мераб Мамардашвили, “человек есть существо, больное бесконечностью”. Замысел Брауэра сопоставляют иногда с кантианской трактовкой геометрии, которую Иммануил Кант основывал на чистой интуиции пространства. Но это не означает, что Брауэра следует трактовать как неокантианца. Интуиционистская доктрина Брауэра ассоциируется в сознании математиков с нападками на теоретико-множественные определения и гильбертову трактовку формальных правил вывода теорем. Положительной стороной программы интуиционистов, которую не выделял даже сам Брауэр, было стремление сделать основным объектом исследований в основаниях математики не только формальные выводы, но и саму умственную деятельность по построению доказательств. Существенный элемент этой программы состоит в новом понимании логических операций как отображений доказательств в доказательства. Вопрос об оценке концепции Брауэра с философской и, прежде всего, математической точки зрения, довольно сложен. Поскольку она представляет собой реформу, а не анализ классической математики, то опыта одной традиционной математики, вообще говоря, недостаточно.

Тем не менее, некоторые положения интуиционизма конкретизируются теоремами Гёделя о неполноте, хотя сам Брауэр, после появления результатов Гёделя, принципиально не желал ими пользоваться для обоснования своих конструкций, так как не относил их к сущности классической математики. В

определенной мере он был прав, поскольку программа Гёделя имеет отношение к достаточно богатой формализации любой математической теории. С точки зрения сторонников интуиционистской доктрины, никакая формальная система не способна охватить все верные методы доказательства, но вторую теорему Гёделя о неполноте тоже можно интерпретировать в этом смысле, а именно, что никакая система не может “охватить” всех методов, использующих ее собственную корректность. Кроме того, хотя Лёйтзен Брауэр и не предполагал, что формальной непротиворечивости достаточно для “корректности” системы, он все же не указал на ее ограниченность, как это удалось сделать Гёделю.

В главе седьмой книги четвертой “Метафизики”, в которой формулируется закон исключенного третьего, Аристотель писал: “И, по-видимому, положение Гераклита, утверждающее, что все существует и не существует, делает все истинным; напротив, учение Анаксагора приводит к тому, что есть нечто посередине между противоречащими утверждениями, так что все оказывается ложным: в самом деле, когда произошло смешение, тогда смесь это уже не будет ни – хорошее, ни – нехорошее, так что < о ней уже > ничего нельзя сказать правильно” [6, с.102]. Поэтому можно понять, почему критики концепции Брауэра возражали против ограничений, наложенных им на применяемые обычно в математической практике логические средства. Они считали интуиционистские ограничения “парализующими” математику. А.Н. Колмогоров и К. Гёдель одни из первых выявили “тривиальность” такого рода возражений, поскольку математики и логики научились строить “основную часть” математики, эффективно используя интуиционистские методы. Тем не менее, указанным возражениям до сих пор доверяют многие математики, так как принципиальный недостаток логики Брауэра, который тоже мало известен, по мнению Гёделя, состоит в том, что получение результатов, построенных по интуиционистским формальным правилам, имеет тот же порядок сложности, что и для соответствующих “классических” систем.

Можно предположить, что первоначальное впечатление о логических свойствах концепции Брауэра было почти столь же ошибочно, как и представления Рассела и Гильберта об их концепциях. Большинство математиков игнорировали новое “неклассическое” направление, поскольку Лёйтзен Брауэр подчеркивал неформализуемость интуиционистской математики, не желая явно выписывать ее аксиомы в соответствии со сложившейся практикой развития математики. Нетрудно понять, почему такие декларации вызывали раздражение Давида Гильберта, который считал, что Брауэр “выплескивает вместе с водой и ребенка”. Обратим внимание на еще одну сторону рассматриваемой проблемы. Требование интуиционистов по отношению к закону исключенного третьего может создать затруднения в задачах, связанных с конечными множествами. Даже в простейшей ситуации, когда допустим кто-то, закрыв глаза, достает из урны шар, в которой имеются три белых и три черных шара, и тут же бросает этот шар обратно при условии, что никто не видел этот шар, мы не имеем возможности узнать, какого цвета он был. Но вряд ли можно всерьез оспаривать достоверность утверждения, что этот шар был либо черного, либо белого цвета.

История развития математики подтверждает, что довольно легко впасть в заблуждение, когда к бесконечным совокупностям применяли метод, допустимый в финитной области. Примеры подобных ошибок хорошо известны из математического анализа. Например, правильность вывода при переносе теорем, справедливых для конечных сумм и произведений, на бесконечные суммы и произведения подтверждается специальными исследованиями сходимости. Свою задачу Гильберт видел в том, чтобы выяснить, почему же использование трансфинитных выводов все же приводит к правильным результатам подобно тому, как это происходит в анализе и теории множеств. Основное эмоциональное возражение Гильберта против интуиционизма выделяет характерные для классической математики методологические подходы. Запретить математику использовать принцип исключенного третьего, считал он, все равно, что, например, запретить астроному пользоваться телескопом. Гильберт настаивал на том, что нереальные, “идеальные” предложения необходимы для “полноты” математических теорий, хотя и соглашался с Брауэром в том, что немалое количество математических предложений не основано на очевидности.

Складывалось впечатление, что Брауэр хотел вывести математику за пределы общей естественнонаучной концепции европейского рационализма, а с другой стороны, заодно пересмотреть в ней “правила игры”, как остроумно заметил Н.Н. Непейвода, “превратив ее из европейского бокса в нечто более похожее на восточные единоборства” [123, с.416]. Отказываясь от требования Брауэра отбросить все, что не имеет смысла, Гильберт старался доказать не истинность отдельного математического предложения, а непротиворечивость системы. Реализация этой программы Гильберта столкнулась с серьезными трудностями. После того, как программа Брауэра получила широкую известность, к ней примкнул один из самых выдающихся учеников Давида Гильберта немецкий математик Герман Вейль, серьезно огорчив тем самым своего учителя, который к тому времени остро полемизировал с Брауэром в связи с крайней настроенностью против теоретико-множественных взглядов последнего.

Так Герман Вейль писал: “Л.Э.Я. Брауэр своим интуиционизмом открыл нам глаза и заставил увидеть, насколько далеко общепринятая математика выходит за рамки таких утверждений, которые могут претендовать на реальный смысл и истинность, основанную на очевидности” [30, с.506]. Вейль сожалел, что Гильберт никогда открыто не признавал, насколько он, равно как и другие математики, в долгу перед Брауэром за его открытие. Косвенным оправданием может служить то, что Гильберт увидел и наметил в общих чертах тот путь, который, без принесения “тяжелых жертв”, которых требовала точка зрения Брауэра, позволит избежать “жестоких увечий” математики. Он был уверен, что, несмотря на признаки колебаний в среде математиков, абсолютную строгость можно восстановить, не “совершая предательства” по отношению к математической науке. Стремление философов математики онтологизировать первичные математические понятия, чтобы получить содержательные представления о них, обусловлено самой спецификой становления

математического метода. Оно совпадало с интересами математиков, которые старались использовать, по возможности, наименьшее число исходных принципов при формулировке математической задачи.

Математики, как бы парадоксально это ни звучало, ради “чистоты” результата сознательно ограничивали себя миром математических понятий, даже специальным миром определенных математических моделей, применимых к большому классу практических задач. Исследование таких моделей, абстрагированных от их отражающих аспектов, становилось для них самоцелью. В этом одна из основных причин платонистского отношения математиков к объектам своих исследований. Возможно, что именно в этом источник творческой силы математики, названный непостижимой эффективностью математики. Поэтому вовсе не удивительно интенсивное вторжение алгебры, которая является одной из наиболее абстрактных ветвей теоретической математики, в разработку алгоритмов, используемых в защите информации.

4.2. Методологическая программа Гильберта и проблема непротиворечивости

Проблема обоснования математики начала XX века в узком смысле состояла в избавлении от парадоксов теории множеств, а более широком смысле в нахождении общих принципов обоснования математических теорий, гарантирующих их непротиворечивость. По замыслу Давида Гильберта всякую математическую теорию, в том числе большую часть классической математики, надо строить как формальную аксиоматическую теорию, а затем в рамках этого формализма попытаться доказать ее непротиворечивость. Почему же вопрос о непротиворечивости арифметики имеет столь большое значение в обосновании математики? С одной стороны, некоторые исследователи полагают, что если концепция натуральных чисел противоречива, то тогда наше мышление вообще не приспособлено к рациональному мышлению. С другой стороны, высказываются и такие мнения, что формальная система не вырождается в бессмысленную игру как раз по причине того обстоятельства, что она содержит противоречие. Другими словами система может быть “локально непротиворечивой”, даже если она в принципе не является глобально непротиворечивой. Математики довольно уверенно смотрят в будущее своей науки, так как представления об актуальной бесконечности не привели к бессмыслице, пока все обходилось хорошо.

По сравнению с первой теоремой Гёделя о неполноте, вторая теорема Гёделя, говорящая о недостижимости непротиворечивости, по мнению некоторых логиков, демонстрирует меньшую устойчивость логического результата, который может исчезнуть при изменении кодировки формул. Правда, отмечает математик и логик Н.Н. Непейвода, “кодировки, при которых можно доказать непротиворечивость, неестественны и даже неформально включают в себя предположение о непротиворечивости, но тем не менее в принципе обойти данную теорему можно” [124, с.122]. В связи со второй

теоремой Гёделя о неполноте методологический вопрос, касающийся непротиворечивости арифметики приобретает вполне практический интерес, который связан с известным вопросом: могут ли компьютеры мыслить? Напомним, что вторая теорема Гёделя ставит под сомнение способность человеческого разума к доказательству непротиворечивости достаточно сложных формальных систем, демонстрируемых как математические утверждения. Но сосредотачиваться лишь на гёделевских ограничениях – значит гордиться своим философско-методологическим бессилием или несостоятельностью философии математики как науки.

Кроме того, несмотря на вполне оправданное стремление искать “конструктивное решение” вопроса о математическом существовании, интуиционистский подход все же является тоже слишком радикальным. В рамках системного синтеза, как принципиально нового философского подхода к обоснованию математики, понятие конструктивности может изучаться в общепринятых рамках философии математики в терминах теории Тьюринга о вычислимости. Программа Гильберта предназначалась для “реабилитации” математики в связи с критикой программы интуиционистов обоснования математики. Соглашаясь со своими оппонентами в том, что не все утверждения математики имеют непосредственный смысл, и даже предлагая более жесткие, чем у интуиционистов, критерии осмысленности математических высказываний, Давид Гильберт, тем не менее, не считал, что надо кардинально изменить некоторые устоявшиеся приемы доказательств. Например, аксиомы, положенные Эрнестом Цермело в основание своей системы, содержат некоторые содержательные предложения, принимая которые, мы переходим в область проблематичного, опирающуюся на мнения различных людей. Пытаясь вернуть математике абсолютно достоверный характер, Гильберт выбрал новый путь для решения проблем обоснования.

В докладе “Проблемы обоснования математики” (1928), прочитанном на Международном математическом конгрессе в Болонье, Давид Гильберт сказал: “С помощью этого нового обоснования математики, которое справедливо может быть названо теорией доказательства, я надеюсь с вопросами обоснования математики, как таковыми, покончить тем, что каждое математическое высказывание я превращу в конкретно предьявляемую и строго выводимую формулу и тем самым перемещу весь комплекс вопросов в область чистой математики” [42, с.450]. Программа перестройки оснований математики, предложенная Гильбертом, состояла из двух дополняющих друг друга задач. Решение одной из них предполагало довести до конца процесс аксиоматизации математики, точнее представить существующую математику в виде формальной теории на основе “очищенной” от парадоксов теории множеств. Таким образом, впервые была поставлена задача формализации классической математики с помощью уточнения понятия математического языка и логического вывода. Другая задача представляла собой радикально новое в то время предприятие – доказать непротиворечивость полученной всеобъемлющей теории. Отметим, что, как и в принципе дополнительности, только обе эти задачи совместно дают полную информацию об основаниях

математики. Кроме того, каждая из задач, взятая в отдельности, недостаточна для решения проблемы обоснования математики, предложенной Гильбертом.

Он первым понял, что только решение до конца первой задачи делает осмысленной постановку второй. Например, пересекаясь, хотя бы частично, с областью интуитивной математики, нельзя уже говорить об абсолютном доказательстве непротиворечивости математики, поскольку утверждение о непротиворечивости относится к множеству всех теорем, доказуемых в теории, то есть к совокупности, четкого определения которой мы как раз не имеем. Давид Гильберт предложил обосновывать математику на базе эпистемологически прочного фундамента финитизма, то есть сознательно ограничивал круг средств, которые он считал допустимыми и надежными. Идеальные объекты необходимы для эффективности нашего мышления, поэтому возникает необходимость хотя бы в принципе обосновать их устранимость из выводов реальных утверждений, даже, невзирая на увеличивающуюся сложность получающихся преобразований. Примером идеальных элементов служат мнимые величины, используемые для придания простого вида теореме о существовании и числе корней уравнения.

Введением идеальных элементов, а именно – бесконечно удаленных точек и одной бесконечно удаленной прямой, можно добиться того, чтобы теорема о том, что две прямые, в том числе и параллельные, всегда пересекаются в одной и только в одной точке, была справедлива во всех случаях. Реально устранять идеальные объекты никто и не собирался, но доказательство возможности такого устранения должно было удовлетворить и “классиков” и “интуиционистов”, а также и представителей направлений других толков. Такие средства Гильберт назвал “финитной установкой”. Это тот круг средств, которые он считает допустимыми и надежными, хотя никогда не описывает это ограничение в четкой форме. Вот образец подобного рассуждения, взятый из доклада “О бесконечном” (1925), прочитанном Давидом Гильбертом на съезде математиков, организованном Вестфальским математическим обществом в Мюнстере в память Вейерштрасса: “И вообще, с финитной точки зрения экзистенциальное высказывание вида “существует число, обладающее таким-то и таким-то свойством” имеет смысл лишь частичного высказывания, то есть части более детального высказывания, которое, однако, таково, что точнее содержание его во многих случаях несущественно” [43, с.441]. Хотя Гильберт не обозначил точно совокупность финитных рассуждений, он, по-видимому, надеялся на умение математиков непосредственно узнавать, финитно имеющееся рассуждение или нет. К финитным высказываниям, считал он, мы должны будем присоединить идеальные высказывания для того, чтобы сохранить простую форму законов обычной аристотелевской логики. Согласно программе обоснования Гильберта математическое утверждение является осмысленным, то есть реальным, высказыванием, если оно само или его отрицание могут быть установлены каким-нибудь финитным рассуждением. Даже Брауэр заявлял, что он не возражал бы против такого обоснования классической математики, лишь бы сами математики классического

направления перестали говорить о реальном смысле, стоящем за идеальными объектами и утверждениями.

Целью программы Гильберта было окончательное решение всех проблем в основаниях с помощью чисто математических средств. В действительности ее цель была скромнее, чем принято было считать, из-за неявного предположения о том, что “реальны” лишь те задачи в основаниях, которые связаны с доказательствами финитистских теорем. При этом, чтобы соответствовать своей философской установке, нельзя сужать класс финитных рассуждений, требуя от последних не только самоочевидности, но и других дополнительных свойств. С точки зрения философии математики Гильберта, важно понимание финитного рассуждения как любого совершенно несомненного рассуждения. Однако работы Герхарда Генцена показали, что, расширяя финитизм некоторыми, все же принимаемыми математиками принципами, можно показать непротиворечивость арифметики и анализа, обоснование которых на базе финитизма оказалось не выполнимым. Тем не менее, Давид Гильберт уловил самую суть проблемы, положив в основу своих попыток построения “абсолютных” доказательств непротиворечивости различие между формальным исчислением и его описанием. Он поставил общую методологическую задачу развития специального метода, позволяющего проводить доказательства непротиворечивости с той же степенью убедительности, что и доказательства, использующие конечное число структурных свойств выражений в полностью формализованных исчислениях. Суть подхода Гильберта состояла в том, что классическую математику, использующую абстракцию актуальной бесконечности, нужно формализовать. С этой точки зрения, позиция Гильберта – это наиболее известная разновидность формализма, хотя, в отличие от мнения большинства, это не единственный его вид.

Согласно его философии непротиворечивости и полноты системы условие непротиворечивости математической теории поддается не только философской, но и арифметической трактовке. Но в этом содержится некоторая “порочная” кругообразность: как можно пытаться доказать какие-либо методы рассуждения, пользуясь этими же методами? Осознавая эту дилемму, Давид Гильберт надеялся, что доказательство полноты и непротиворечивости удастся найти с помощью финитных методов рассуждения, признаваемых большинством математиков. Именно эта математическая цель – доказательство правильности всех математических методов путем использования лишь нескольких из них – занимала умы многих великих математиков первые тридцать лет XX столетия. И только в 1931 году Курт Гёдель опубликовал работу, подорвавшую основы гильбертовой программы. Теоремы Гёделя о неполноте способствовали распространению мнения о том, что аксиоматический метод недостаточен для реконструкции содержательного математического мышления. Даже первой теоремы Гёделя о неполноте достаточно для того, чтобы исключить “окончательное решение” в подходе Гильберта. Для окончательности оно должно было бы предъявить метод, разрешающий любую финитистскую задачу, но это, например, как показал русский математик Ю.В. Матиясевич, не относится, вообще говоря, к

диофантовым уравнениям. Отношение второй теоремы Гёделя о неполноте к программе Гильберта с методологической точки зрения более сложное. Во-первых, в реальной математической практике для любых формальных аксиом, действительно используемых математиками, всегда имеется некоторая абстрактная интерпретация, обеспечивающая их непротиворечивость. Во-вторых, вторая теорема Гёделя о неполноте опровергает широко распространенное в начале XX столетия убеждение, сформулированное Гильбертом, которое в каком-то смысле дополнительно к гипотезе об окончательном решении, а именно то, что теоретико-множественные и другие абстрактные понятия – это лишь способы выражения, а потому соответствующие трудности могут быть непосредственно устранены.

Пока математики не умели еще эффективно использовать теоретико-множественные методы, убеждение Гильберта согласовывалось с имеющимся “эмпирическим опытом”, но это никак нельзя было признать за обоснование для формальных систем, пытающихся доказать свою собственную непротиворечивость. Вторая теорема Гёделя о неполноте указывает соответствующий класс контрпримеров. Математикам хорошо известен такой парадокс: если даже элиминировать, то есть каким-то образом устранить или удалить абстрактные понятия из доказательств, то обнаруживается “философский дефект” такой процедуры, а именно, теряются дополнительные знания, содержащиеся в исходных предложениях. С точки зрения математической практики, если система непротиворечива, но не полна, то существует несоответствие между символами системы и их интерпретациями, а возможно, система недостаточно мощна, чтобы оправдать данную интерпретацию. Говоря о программе Гильберта, следует иметь в виду, что она осмысленна только в ситуациях, когда его программа может быть проведена. Поэтому, используя терминологию Гильберта, математики и философы должны “верить” в его программу. Для работающих математиков Давид Гильберт логичен, последователен и ясен, а аксиоматический метод и формализм являются существенной частью их правил мышления. Напомним, что, согласно доктрине платонизма, абстрактные объекты существуют независимо от нас, и утверждения о них имеют абсолютное значение. Платонизм более метафизичен, чем интуиционизм, но в тоже время платонисты допускают возможность формализации. После того как выяснилось, что значительная часть математики может быть выражена на языке аксиом Цермело-Френкеля с добавлением аксиомы выбора, появилась вера в “теоретико-множественный платонизм”, то есть в существование мира реальных множеств. Вот что пишет по этому поводу один из создателей теории категорий Сандерс Мак-Лейн: “Мое мнение, однако, состоит в том, что идея реального мира множеств – это миф, хоть и удобный, но все же миф” [104, с.151]. Математикам хотелось бы считать, что математические понятия описывают некоторую реальность, придавая тем самым дедуктивным заключениям большую убедительность.

Отдельные примеры множеств, например, канторово множество, его плоский аналог – ковер Серпинского, их пространственный аналог – универсальная кривая Менгера и тому подобные хитроумные математические

объекты, далеки от воображаемой реальности мира множеств Цермело-Френкеля. Даже математическая эффективность теоретико-множественного формализма не является аргументом в пользу существования платоновского мира. Возвращаясь к проблеме гильбертова идеала чистоты метода, заметим, что если не ограничивать себя полными системами, то гёделевские результаты теряют всю свою философско-методологическую остроту. Во времена Сократа говорили, что действительность состоит из сущностей, а не из явлений, и то, что вещь есть в действительности, высказано в определении. Поэтому, зная определение, мы тем самым познаем сущность вещей. “Сущности бессмертны”, – считал Лейбниц, поскольку они касаются только возможностей. С сущностью математики, как и любой другой развитой науки, непосредственно связан вопрос об истинности математических утверждений. Как правило, профессиональные математики основывают идею истинности на строгом доказательстве в рамках той формальной системы, в которую входит рассматриваемое высказывание. Не всегда это удается сделать с первой, казалось бы вполне убедительной, попытки. Например, долгое время считалось, что в мемуаре французского математика Энри Дюлака “О предельных циклах” (1923) получено доказательство конечности числа предельных циклов для уравнений, рассмотренных Давидом Гильбертом во второй части его 16-й проблемы. Только в начале 80-х годов Ю.С. Ильяшенко обнаружил ошибку в доказательстве Дюлака. Его обзор, после формулировки проблемы конечности, начинается словами: “Эта проблема конечности не решена до сих пор” [67, с.41]. Позднее он получил доказательство этой теоремы конечности, хотя вопрос об оценке сверху числа предельных циклов и их расположения остается открытым.

Уместно отметить, что одной из причин стремления к строгости была преподавательская деятельность математиков XIX века. При исправлении ошибок математики надеются, что соответствующие изменения уже сами по себе приведут их к нужным для систематической науки концепциям. Эта надежда неявно опирается на “логический приоритет истинности”, который является сущностью любой систематической теории доказательств. Один из наиболее устойчивых “мифов” математического образования состоит в том, что преподавание математических дисциплин в рамках теоретико-множественной концепции – это наиболее простой и естественный процесс, с точки зрения интуиции и традиций априорного характера геометрических истин. С другой стороны, трудно избавиться и от определенных “педагогических натяжек” не только с точки зрения приблизительных определений и адаптированных доказательств, но и некоторого “воинствующего догматизма” аксиоматического изложения теорий. Современная образовательная система делает слишком большой упор на том, что известно, и слишком мало внимания уделяется тому, что еще неизвестно и, возможно, вообще не может быть познано. Развитию методологии мышления способствует понимание содержательных аспектов категорий дополненности. Анализовавшие этот вопрос специалисты по методологии физики О.Н. Голубева и А.Н. Суханов пришли к выводу, что “методологические категории целостности и

дополнительности оказываются чрезвычайно значимыми факторами в процессе построения новых образовательных систем” [45, с.7]. Задачей преподавания математических дисциплин, наряду с приобретением соответствующих практических навыков, является введение в мир фундаментальных идей математики, “скрытых” за научными формулировками.

Базовой дисциплиной в математическом цикле большинства университетов мира, на которой можно проследить основные идеи развития математики, является математический анализ. Немецкий математик XIX века Карл Вейерштрасс впервые с достаточной строгостью заложил основы математического анализа. После прояснения ситуации с определением основных понятий математического анализа, таких как сходимость, предел последовательности, непрерывность и так далее, выяснилось, что некоторые из понятий, реконструированных в терминах “эпсилон-дельта”, обладают неожиданными свойствами, которых не было у их интуитивных прообразов. Желание подвести под математику прочный фундамент было всеобщим увлечением выдающихся математиков. Например, для использования числовых рядов необходимо было корректно определить понятие сходящейся числовой последовательности, а затем найти условия сходимости ряда. Именно с помощью функционального ряда был построен знаменитый пример Вейерштрасса – непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке, доставивший немало огорчений многим математикам, не допускавшим такой возможности. Хотя вначале, сумме сходящегося функционального ряда отказывали даже в праве называться функцией. Точно неизвестно, когда Карлу Вейерштрассу удалось построить свой знаменитый пример. О непрерывной функции, не имеющей конечной производной ни в одной точке, а именно

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

где a – действительное число, $0 < a < 1$, b – нечетное целое и $ab > 1 + (3/2)\pi$, он доложил в 1872 году Берлинской академии наук, а опубликован этот пример был в 1875 году. Этот и похожие примеры впервые показали, что понятие непрерывности намного шире, чем дифференцируемости и, таким образом, непрерывность предстала как вполне самостоятельный объект исследований. Конструкция Вейерштрасса стала возможной потому, что при построении анализа в силу необходимости за основу было взято локальное определение непрерывности в точке, пренебрегая при этом интегральными свойствами. Непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции, применяются в теории случайных процессов типа броуновского движения. Теперь это вполне “добропорядочные” математические объекты, хотя вначале у Анри Пуанкаре эти функции вызвали отвращение, что он даже называл их “язвой”. Для XX века характерен новый подход к понятию функции, рассматриваемой, например, как элемент гильбертова пространства и, следовательно, являющейся лишь представителем некоторого класса эквивалентных функций. Отметим также устойчивый интерес Вейерштрасса к теории множеств Кантора, с помощью которой было доказано, что “большинство” непрерывных функций нигде не дифференцируемы, но от этого не стало легче приводить примеры таких функций.

Уже в XIX веке у математиков была убежденность в том, что невозможно решить все дифференциальные уравнения. В XX веке выяснилось, что невозможно и качественное исследование всех уравнений. Качественная теория дифференциальных уравнений оказалась такой же неразрешимой задачей, как и количественная теория, а современные представления о возможных типах детерминации процессов столь же неполными, как и в прошлом веке. Примечательно также то, что Давид Гильберт, ставя проблему существования решения граничной задачи для эллиптического уравнения на II Международном математическом конгрессе в Париже (1900), прошедшем в обстановке творческого подъема и больших математических надежд, говорит в 20-й проблеме не о классическом решении, а об обобщенном, точнее о необходимости придать понятию решения “расширенное толкование”. Это понятие еще не было введено в математику и указание на возможность обобщения понятия решения было одним из первых в истории математики. Современное развитие математики изобилует примерами абстрактных обобщений, вдающихся в несущественные детали, хотя для большинства приложений математики лучше подходят относительно “грубые” классификации и эквивалентности. Например, зная, что проблема классификации конечномерных многообразий очень трудна, а в действительности – неразрешима, какой смысл решать подобную проблему для бесконечномерных многообразий?

Даже современная теория уравнений в частных производных с ее последовательными “дуализациями” и с построениями вспомогательных пространств выглядит уходящей в мир “платоновских призраков”. Осторожная точка зрения на направление развития функционального анализа, высказанная одним из лидеров современной математики Рене Томом, состоит в том, что его основная цель – помогать решать конечномерные задачи дифференциальной и топологической природы, а сам функциональный анализ должен быть дополнен таким образом, чтобы рассматриваемые в нем функциональные пространства несли “следы своего происхождения”. Доказуемость, бесспорно, важный критерий истинности, даже если она основывается только на логической выводимости утверждений и теорем из аксиом, истинность которых в рамках формальной системы не рассматривается. Однако наряду с критерием доказуемости используются также критерий интуитивной очевидности, критерий непротиворечивости и критерий полезности математической модели. Критерий интуитивности занимает видное место в философии интуиционистов или реалистов. Речь идет о некоторой внутренней уверенности, гарантирующей “существование” исследуемых математических объектов. “Если бы математики были лучше знакомы с взглядами таких мыслителей, как Декарт, Паскаль и Кант, – заметил американский историк и философ математики Морис Клайн, – то интуиционистское направление в основаниях математики, считавшееся, по крайней мере, в первые годы после его возникновения, весьма радикальным, шокировало бы их гораздо меньше” [81, с.269]. Практически работающие математики, даже склонные к философскому анализу методов исследования,

вряд ли будут прилагать много усилий для разрешения проблемы существования в математике.

Прагматичное объяснение, в конечном счете, сводится к тому, что существование самой математики не зависит от решения этой и подобной ей проблем. С точки зрения прикладной математики, слабость теоретико-множественной математики по отношению к приложениям состоит в том, что этой теорией можно пользоваться лишь тогда, когда прикладная задача переведена на соответствующий математический язык. Но даже после этого возникают проблемы чисто экзистенциального характера, поскольку во многих теоремах существования ничего не говорится о том, как такое решение может быть точно или приближенно найдено. Поэтому математики различают два дополнительных взгляда на существование математических объектов. В частности, в прикладной математике он идентифицируем и конструируем, то есть существует как математическая модель реального объекта. И формалисты, и интуиционисты теряют интерес к проблеме, как только она оказывается теоретически разрешимой, но с точки зрения прикладных математиков задача не решена, пока еще нужны дополнительные соображения для получения требуемого знака.

Проблема расширения границ практических возможностей обусловлена существующим барьером между тем, что можно сделать в принципе и тем, что можно реализовать на практике. “Практическая реализуемость” – это тоже понятие, достойное философских рассуждений. С точки зрения феноменологического подхода, в духе единства идеального предмета и смысла, математикам, чтобы избежать путаницы пока еще не унифицированных понятий, подобно тому, как это делают физики, следует использовать оба различных смысла. В действительности, даже “понятие существования, на которое безраздельно опирается наивная теория множеств, на самом деле не является само собой разумеющимся” [21, с.27]. Возросшая абстрактность современной математики породила и более серьезную проблему о внутренне непротиворечивой системе аксиом, в которой нельзя вывести противоречащие друг другу утверждения. Если речь идет об аксиомах, описывающих хорошо известную область математических объектов, то эта проблема не представляется столь уж актуальной. Возможно, с этим связаны различные попытки объяснить математическое существование через непротиворечивость, то есть считать, что в математике реально все, что не является невозможным. Заметим, что конструктивность не признает ряд важных математических объектов и тоже ставит задачу объяснения существования конструкции, а существование конструктивного объекта, например, в рамках концепции, предложенной конструктивным математиком и логиком А.А. Марковым, предлагалось понимать как потенциальную осуществимость. Если отвлечься от философских метафор, типа платоновского мира идей, то, рассуждая о попытках отождествления существования с непротиворечивостью, можно воспользоваться и такой физической аналогией: хотя фактическое не является невозможным, тем не менее, возможное существует не всегда.

“Проблема непротиворечивости аксиоматической теории множеств – это своего рода “любимая мозоль” специалистов по данному вопросу. Ее пытаются решить, но “добровольно” признаваться в том, что она пока еще не решена, у них как-то не принято”, – пишет в предисловии “Размышления и воспоминания” математик и философ Н.М. Нагорный [110, с.XVI]. Иногда вместо верной импликации в качестве верного утверждения преподносится ее заключение, что приводит к курьезным утверждениям о ее “решении” в положительном смысле. Например, иногда утверждают, что аксиома выбора не может быть ни доказана, ни опровергнута в теории Цермело-Френкеля, забывая добавить, что это “факт” верен лишь при предположении непротиворечивости данной теории, поскольку в случае противоречивости теории в ней было бы доказуемо любое утверждение, в том числе и аксиома выбора. Критерий непротиворечивости, несмотря на его существенную роль в аксиоматических системах, как формального, так и содержательного характера, является таким же вспомогательным логическим критерием, как и доказуемость. История математики знает немало случаев, когда противоречивые понятия и теории были весьма полезными для развития науки, например, δ -функция и лейбницев анализ бесконечно малых, которые впоследствии на новом теоретическом фундаменте были строго обоснованы в рамках современных теорий обобщенных функций и нестандартного анализа. С точки зрения физика, дельта-функция Дирака, определяемая как $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$, $\delta(0) = \infty$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$, представляет собой точечную единичную массу бесконечной плотности.

Для математика такое представление – это абстрагированный вариант из категорий “внутренней” семантики физической теории. Однако, осознав внешний аспект дельта-функции как функционала на пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций, французский математик Лоран Шварц включил ее в формализм функционального анализа, а как частный теоретико-множественный объект – в общематематические теории. В классическом анализе обобщенные функции, рассматриваемые как “расширение” классического понятия функции, позволили в соответствующей математической форме выразить такие идеализированные понятия, как, например, интенсивность мгновенного точечного источника, интенсивность силы, приложенной в точке и так далее. Теория Шварца имела много предшественников и сравнима в этом отношении и по своей значимости с дифференциальным исчислением Ньютона-Лейбница. Хотя выдающиеся математики Европы середины XVII века умели решать многие задачи, в которых теперь используется дифференциальное и интегральное исчисления, никому из них не удавалось создать формализм, избавляющий от частных рассуждений в отдельных случаях. В математическом формализме понятия обобщенной функции отражен реальный факт невозможности определения плотности вещества в точке, поэтому, условно говоря, обобщенная функция определяется своими “средними значениями” в окрестностях каждой точки.

Физики, исходя из интуитивных соображений, часто определяют и используют произведение двух обобщенных функций.

Как показывает на примере специалист по дифференциальным уравнениям с частными производными Ю.В. Егоров, “иногда это приводит к неверному результату” [60, с.4]. Поэтому в последние годы в работах французского математика Жана Коломбо и ряда его последователей развивается новая теория обобщенных функций, в которой определено их произведение и даже можно вычислить значения других нелинейных функций от них. Новое пространство обобщенных функций содержит обобщенные функции пространства Шварца, но, в отличие от последнего, в нем имеет смысл, например, формальное выражение δ^2 или δ^3 . Построение обобщенных функций пространства Коломбо основывается на довольно естественной конструкции, в каком-то отношении более простой, чем теория распределений Шварца. Лоран Шварц высказывался также в том духе, что до Гильберта вообще не было строгой математики, хотя для большинства математиков евклидова геометрия является исторически первым образцом строгости. Однако, методологический парадокс состоит в том, что практический путь формирования понятия обобщенного решения, а затем и понятий обобщенных функций противоречит методологической установке Гильберта, согласно которой предметом математики является только непротиворечивая система. Можно сказать, что, в определенном смысле, традиционная метафизика еще неумела и стремится найти с современной философией математики общий язык.

Характерной особенностью метаматематики является то, что философская рефлексия рассматривается в ней исключительно в математической перспективе. С этой точки зрения метаматематика – это реконструкция математического мышления в рамках только математического мышления. Давид Гильберт противостоял попыткам ограничения математики устоявшимися методами, выступая в защиту свободы творчества в математике. Он критиковал интуиционистов за то, что, пытаясь “спасти математику” и выбрасывая за борт все, что причиняло им беспокойство, они могли потерять большую часть наших “самых ценных сокровищ”. В зените своей славы, Давид Гильберт представил собранию Швейцарского математического общества в Цюрихе программный доклад “Аксиоматическое мышление” (1917), в котором он развил свое понимание аксиоматического метода, как общего метода исследования, занимающего важнейшее место во всей современной математике. “Чтобы восстановить репутацию математики как эталона строгой науки, – говорил Гильберт, – недостаточно просто избавляться от имеющихся противоречий: принципиальное требование аксиоматической теории должно простираться дальше, а именно надо знать, что внутри данной области знания, построенной на основе принятой системы аксиом, никакие противоречия вообще невозможны” [42, с.414]. Сущность аксиоматического метода состоит в том, что все объекты исследования, достигшие уровня зрелости, достаточного для оформления в теорию, прибегают к аксиоматическому методу, а через него, хотя и косвенно, к математике. Какую пользу может принести аксиоматизация?

Во-первых, подправить интуицию, исправить неточности, двусмысленности и парадоксы, неконтролируемые бессознательными процессами мышления. Во-вторых, она позволяет исследовать отношения между основными положениями и принципами теории, с точки зрения их зависимости или независимости, а также анализировать связь этих положений с доказанными утверждениями теории в контексте необходимости ее аксиом. В-третьих, аксиоматизация позволяет иногда установить недостаточность формальной теории для некоторых естественно возникающих в ней проблем.

Философская составляющая формалистических концепций математики связана с абсолютизацией ее внешнего аспекта, в котором содержание отождествляется с формой. Можно привести различные аргументы в оправдание такого подхода. Например, один из создателей квантовой теории английский физик Поль Дирак, размышляя о причинах фундаментальной особенности природы, согласно которой, основные физические законы описываются математической теорией, в статье “Эволюция физической картины природы” (1963) писал: “Ситуацию, вероятно, можно было бы описать, сказав, что Бог является математиком очень высокого ранга и что он при построении Вселенной использовал математику высшего уровня” [35, с.128]. Пониманию сущности программы математики Гильберта мы обязаны прежде всего трудностям теории множеств Кантора. Радикальный план “спасения” теории множеств, выдвинутый Гильбертом, состоял в предложении аксиоматизировать эту теорию с помощью разработанной им теории доказательств, а затем доказать непротиворечивость построенной системы аксиом. В таком образом формализованной теории парадоксы были бы невозможны, но и не было бы соответствия этой теории, пусть и противоречивому, но первоначальному замыслу “наивной” теории множеств Кантора. Это труднейшая задача, поставленная Гильбертом, не решена и по сей день.

Согласно первой теореме Гёделя никакое исчисление такого рода, определяемое конечным числом аксиом, недостаточно для того, чтобы включить в себя все истинные утверждения арифметики и теории множеств. В статье под названием “Выживет ли современная математика?” (1997) академик В.И. Арнольд назвал формализованный аксиоматический метод, являющийся развитием программы Гильберта, “самоубийственным демократическим принципом”. Однако, следует отметить, что методологические следствия теорем Гёделя зависят от различных толкований понятий “финитный”, “конструктивный”, “содержательный” в программе формализма. С точки зрения интуитивизма даже при аксиоматическом изложении теории проникновение в суть непротиворечивости достигается с помощью интуитивных рассуждений, основанных на очевидности. Даже сам Гильберт, по мнению Германа Вейля, был “строгим формалистом” в математике и, в то же время, “строгим интуитионистом” в метаматематике. После того, как в “Основаниях геометрии” (1899) Гильберт доказал совместимость выделенных им аксиом, для которых противоречия в дедуктивных выводах сказывались бы

и на системе действительных чисел, а вопрос непротиворечивости аксиоматики последней, с помощью понятий теории множеств, был сведен к такому же вопросу для целых чисел, возникла определенная эйфория от того, что удалось наконец поставить математику на аксиоматический фундамент. Начиная с аналитической геометрии Декарта, математики уверены в том, что для большинства их конструкций необходимо поле вещественных чисел. В частности, любое противоречие в евклидовой геометрии должно проявиться как противоречие в аксиомах арифметики, на которых основаны операции с действительными числами.

Герман Вейль считал, что до Давида Гильберта никто “так ясно этой мысли не высказал”. Вопросы, касающиеся арифметической сущности математики и проблем обоснования с помощью аксиоматизации, были в центре внимания философов математики XX века. Большинство работающих математиков понимают под словом “аксиоматизация” вовсе не пересмотр основ математики, которые, вообще говоря, не имеют непосредственного отношения к их научным интересам в области математики и поэтому не очень их волнуют. Тем не менее, вопросы непротиворечивости теории множеств входят в обширную область трудных проблем теории познания, связанных с математикой. Характеризуя эту область, Гильберт упомянул о следующих пяти важнейших проблемах философии математики: принципиальной разрешимости каждого математического вопроса, дополнительной проверке результатов математического исследования, критериев простоты математических доказательств, соотношении содержательного и формального в математике и логике, разрешимости математических задач с помощью конечного числа операций. Именно последнее требование, ограничивающее математические рассуждения финитными средствами, оказалось чрезмерно сильным и наиболее часто обсуждаемым философами, поскольку оно затрагивает сущность математического мышления. Хотя теоремы Гёделя запрещают полное доказательство непротиворечивости арифметики на основе финитных соображений, они, тем не менее, не закрывают других путей внутреннего обоснования непротиворечивости математики, что, безусловно, укрепляет веру математиков в непротиворечивость арифметики в целом.

Исторически теория доказательств Гильберта создавалась как средство преодоления трудностей, обнаружившихся в теоретико-множественной программе Кантора. Когда казалось, что бесконечное “в своем отважном полете” достигло “головокружительной высоты”, по мнению Гильберта, произошло нечто совершенно аналогичное тому, что уже случилось в математике при развитии теории исчисления бесконечно малых. То есть, увлекшись обилием новых результатов, математики ослабили критическое отношение к допустимым логическим средствам, что и привело к так называемым парадоксам теории множеств. Сложившееся в то время положение в математике Давид Гильберт эмоционально охарактеризовал так: “Подумайте: в математике, – этом образце надежности и истинности, – понятия и умозаключения, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к

нелепостям. Где же тогда искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?” [43, с.438]. Кроме того, Брауэр, подвергший критике не только антиномии, но и всю теорию множеств в целом, предложил возводить математику на базе умственных математических построений, показав, что для их рассмотрений требуется применять особую интуиционистскую логику, в которой ни закон исключенного третьего, ни закон снятия двойного отрицания не могут претендовать на роль универсальных логических принципов.

Поэтому теории доказательств Гильберта отводилась еще и роль противовеса этой программе обоснования. Заметим, что в этой дискуссии отражена специфика математики и, в частности, различный статус математических и физических теорий по отношению к опыту. Исходя из внутренних потребностей математики, в ней допустимы такие свободные гипотезы, как неевклидовы геометрии, неархимедовы метрические пространства или нестандартный анализ, а в физике не строят, к примеру, немаквелловскую теорию электричества, как возможную для других миров. Задача установления непротиворечивости классической формальной арифметики была впервые решена учеником Гильберта немецким математиком Герхардом Генценом только в 1936 году, причем средствами, не укладывающимися в финитную установку Гильберта. Он использовал аксиому трансфинитной индукции, в которой, в отличие от обычной индукции, использующейся в математике, рассуждения ведутся не по натуральным числам, а по ординальным числам, обозначающим бесконечные совокупности чисел. Герман Вейль назвал доказательство Генцена “пирровой победой” из-за того, что ему удалось это сделать, “лишь значительно снизив требования Гильберта к очевидности”.

К настоящему времени известны и другие доказательства непротиворечивости арифметики, но, как отмечают некоторые математики, совместимость этих доказательств с финитной установкой Давида Гильберта и степень их конструктивности анализируются далеко не всегда, а отдельные авторы демонстративно считают этот вопрос проблемой “субъективной природы”. При этом нельзя забывать и о второй теореме Гёделя о неполноте, согласно которой утверждение о непротиворечивости арифметики, формально выраженное в языке самой арифметики, не охватывается аксиомами арифметики в том смысле, что ни само это утверждение, ни его отрицание недоказуемы в формализме арифметики, если не использовать каких-то допущений, выходящих за ее пределы. Если к этому добавить первую теорему о неполноте, то можно сказать, что Куртом Гёделем была фактически доказана не только невозможность полной непротиворечивой ее аксиоматизации, но и, в определенном точном смысле слова, невозможность средствами, формализуемыми в ней самой, доказать ее непротиворечивость. Сам Гильберт, накануне публикации результата Генцена, считал, что результаты Гёделя на самом деле показывают, что для более глубоких доказательств непротиворечивости финитная точка зрения должна быть использована

“некоторым более сильным образом”, чем при рассмотрении элементарных формализмов. Что же касается проблемы установления непротиворечивости анализа, решение которой прояснило бы судьбу теории доказательств, то она не решена до сих пор, как и проблема непротиворечивости аксиоматической теории множеств.

Специфика математики в отношении ее непротиворечивости проявляется в ее согласованности со структурами, обладающими, по мнению математиков, высокой степенью непротиворечивости с арифметикой и логикой. Поэтому, можно сказать, что одной из главных целей программы Гильберта было доказательство автономии этой элементарной математики. Во избежание некоторых недоразумений следует помнить, что бывают “самые настоящие” доказательства непротиворечивости, в том смысле, что используемые математические методы явно более элементарны, чем те интерпретации, которые привели к изучаемым формальным системам. После результатов Курта Гёделя о невозможности полной формализации всей существующей математики и даже невозможности доказательства непротиворечивости арифметики финитными средствами развеялась надежда на принципиальную реализуемость программы Гильберта в полном объеме. Хотя, когда была построена система аксиом для целых чисел, многие математики были вполне удовлетворены тем, что “число стало миром в себе” и на его основе можно оперировать, не оглядываясь на реальность, в которой даже не встречаются сверхбольшие числа. Обращение к нефинитным методам, с частичным отказом от ограничений Гильберта, все же позволяет доказать непротиворечивость формализованной теории целых чисел. Тем не менее, несмотря на отрицательные результаты Гёделя, принципы оснований математики Гильберта по-прежнему важны и интересны для современной математики.

Рене Декарт мечтал о том, чтобы история математики, разбросанная по многим томам и “в целом еще не завершенная”, была бы вся собрана в одной книге, поскольку авторы многое заимствуют друг у друга. Реализовать этот грандиозный проект уже в XX веке не смогла даже группа Бурбаки. Декарт – это “предтеча Бурбаки”, считает В.И. Арнольд. Хотя лидеры Бурбаки были универсальными математиками, практически они были ближе к алгебре. Интегральное и дифференциальное исчисление они рассматривали как раздел функционального анализа, хотя в то же время началась геометризация анализа на основе современной дифференциальной геометрии и топологии. “Они не увидели (или не захотели увидеть и отразить в своем трактате) начавшееся в семидесятые годы (на той же основе) слияние теоретической физики и математики, в частности вокруг квантовой механики” [154, с.11]. Поэтому, хотя, в определенной мере, группе Бурбаки удалось реализовать свой начальный замысел описания всей математики на единой основе в первых пяти томах “Фундаментальных структур”, их дальнейшие публикации уже не смогли охватить все новые направления современной математики. В математике, взявшей за образец греческий способ конструирования науки, проблема “смысла” решается унифицировано, с помощью систем аксиом и их теоретико-

множественных моделей. Сто лет назад математики и философы осознали, какие бездны проблем открываются перед ними в связи с теорией бесконечности Кантора.

Главный шаг при размышлении о некоторой проблеме – это выбор идеи, которая сработает. Давид Гильберт, используя формализацию языка, предложил эффективный метод развития математики. Ранний период его теории доказательств был вполне удовлетворительным, и результаты начала прошлого века остаются самыми интересными в математике. К ним можно отнести: математическое уточнение Гильбертом широко распространенного аксиоматического метода рассмотрения формальных моделей содержательной математики и исследование вопросов непротиворечивости таких моделей надежными финитными средствами; установление с помощью адекватной формализации того, что убеждение относительно роли формальных правил в математике верно для многих областей математической практики того времени; опровержение теоремами Гёделя о неполноте оптимистических надежд Гильберта на полное решение вопросов оснований математики на указанном им пути. Теория доказательств с самого начала возникла на стыке двух конфликтующих концепций – интуиционизма и формализма, каждая из которых пользовалась своей логикой, в связи с их подходом к проблеме выбора логических средств, допустимых в математических рассуждениях. Вот что отмечает по этому поводу Н.М. Нагорный: “В самом деле, высказывание, оказавшееся истинным в рамках одной логики, вполне могло оказаться ложным в рамках другой. Более того, могло оказаться, что высказывание, истинное в рамках обеих логических систем, в действительности доказывается в них по-разному, так что доказательство, приемлемое в рамках одной из этих систем, будет отвергаться в рамках другой, и наоборот” [118, с.107]. Ограничительные результаты Курта Гёделя показали, как хрупка грань между осмысленным и неосмысленным, между правильным и неправильным в математике.

Поэтому при анализе столь сложного вопроса, как непротиворечивость формальной математической теории, следует учитывать все, возникающие в связи с этим, дополнительные проблемы, в том числе и соотношение формализуемой теории с ее формализацией. Однако дальнейшее развитие теории доказательств, как отмечает Георг Крайзель, не вызвало интереса ни среди математиков, ни среди основной массы логиков, даже несмотря на существующую генценовскую теорию доказательств. Одна из существенных причин осторожного отношения к таким работам связана, по его мнению, с тем, что цели гильбертовской теории доказательств “исходят из опровергнутых представлений о математике” [90, с.215]. Если математическая теория не формализована, она все же ограничивает средства, допустимые для решения своих проблем, хотя математические структуры имеют определенную произвольность. Возможно, что ошибка классических программ обоснования математики состояла в том, что они стремились абсолютизировать какую-то одну систему “достоверных” положений обоснования, не учитывая их дополнительный характер взаимодействия. То есть в них не выдерживался

принцип “логического консенсуса”, одинаково приемлемый и для формалиста, и для интуициониста. Один из высших уровней рефлексии традиционно называется метафизическим, но метафизика, в первую очередь, концентрирует наше внимание на абстрактной системе отношений, присутствующей во всяком формализованном знании. Научное исследование интуиционистской и формалистской философии математики никогда не дает их полного описания, так же как недостижима полная теория познания других явлений. Поэтому оценку систем обоснования математики целесообразнее проводить по критерию полезности, а не по произвольному истолкованию на основе метафизических предпочтений.

Определение “истины” в математике не должно зависеть ни от каких метафизических допущений. Если математик и вынужден принять такое допущение, то он скорее предпочтет формальные теории, пусть и ориентированные на платонизм, но зато находящиеся в большем согласии с привычной математической практикой. В формализациях математики, ориентированных на интуиционизм, подобно тому, как это происходит в современных физических теориях, важен действительный смысл произведенных операций. Вообще говоря, формализм допускает сосуществование различных видов математики. Академик А.Н. Колмогоров в своей статье “О принципе *tertium non datur*” (1925) установил, что для широкого класса математических рассуждений закон исключенного третьего не может быть источником парадоксов, так как парадоксы, содержащиеся в теории, воспроизводились бы и в аналоге такой теории, не использующей этот закон. Затем в начале тридцатых годов Арндт Гейтинг предложил формализацию арифметики, которая согласуется с интуиционизмом. Интуиционистскую математику нужно изучать как часть математики, считал он. Обосновывая эту точку зрения, Гейтинг говорит, что “крайний финитизм дает максимальные гарантии против опасности непонимания, но, по-нашему мнению, он влечет за собою такое отрицание понимания, которое трудно принять” [40, с.16]. Несколько позже Курт Гёдель выяснил, что, аналогично полученному Колмогоровым результату, все противоречия классической арифметики, если такие существуют, воспроизводятся и в интуиционистской арифметике. Таким образом, если считать интуиционистскую арифметику финитно обоснованной по построению, то, с одной стороны, Гёдель вслед за Гейтингом показал, что классическую арифметику можно интерпретировать в интуиционистской арифметике, а с другой стороны, он осуществил финитное доказательство, которое “запрещено” теоремами о неполноте.

Можно сказать, что с одной стороны, непротиворечивость классической арифметики удастся доказать интуиционистскими методами, а с другой стороны строго финитное доказательство этой непротиворечивости противоречило бы теореме Гёделя о неполноте. Поэтому в контексте финитной точки зрения в интуиционистской арифметике есть некий неконструктивный элемент, но в чем именно он заключается, непонятно. Один из возможных выводов, следующих из содержательного анализа “финитной части” доказательства Гёделя, может состоять в том, что оно финитное потому, что

оно полностью не формализовано. Но тогда, опираясь на бесспорные содержательные рассуждения, можно даже пренебречь “трансфинитным элементом” в обосновании непротиворечивости арифметики. Кроме того, понятие “интуитивно верного доказательства” не может быть охвачено никакой единой формализацией, поэтому, как считает Хаскелл Карри, теорема Гёделя свидетельствует о том, что, с интуиционистской точки зрения, математическое доказательство является примером “становящегося” понятия, подобно бесконечным множествам. Интуиционизм имеет два аспекта – метафизический и конструктивный, поэтому, если с тезисов интуиционистов снять их “метафизический налет”, то они могут оказаться приемлемыми и для формализма.

Именно формализация математики привела к более ясному осознанию природы самой математики, способствуя тем самым ее применению к нечисловым и непространственным объектам, например, к естественным и искусственным языкам и программам для вычислительных машин. Заметим, однако, что любая хорошая формализация неизбежно обедняет исследуемый объект и ради успешной работы игнорирует его многочисленные несущественные черты. Поэтому, помня о стоящей задаче, целесообразно использовать различные дополнительные виды формализации, которые, отличаясь друг от друга в отношении содержательной интерпретации, могут рассматриваться одновременно. В таком контексте формализм не исключает другие содержательные математические программы. Произошедший во второй половине XX века взлет современной математики, а также переосмысление сущности самой математики в трудах Гильберта, Брауэра, Вейля, Гёделя, Бурбаки и других выдающихся математиков – все это последствия того “переворота”, который был совершен Георгом Кантором. Концепция Кантора построения всей математики на базе теории множеств была воспринята сначала с большой настороженностью, потом многими, в том числе и Давидом Гильбертом, с восхищением, а затем она была подвергнута критике, отголоски которой слышны до сих пор.

Понимание функции математики в науке в настоящее время решается в пользу уточненной позиции Кантора и Гильберта, согласно которой в математике могут применяться любые непротиворечивые системы понятий, имеющие внутреннюю или внешнюю содержательную значимость. Гильбертова программа формализации по-прежнему остается единственной вполне точной точкой зрения в этих вопросах. В основе расхождения интуиционистов и конструктивистов с “классиками” лежит понимание границ математики, оправдываемых их представлениями о научности и истинности. Что это по существу означает для математики? – спрашивает академик В.А. Садовничий. “Если и не отказ от классического, основанного на аксиомах, чисто логического вывода, в качестве единственно возможного способа доказательства, то, по крайней мере, – говорит он, – признание права на такую же математическую достоверность и доказательность за другими схемами рассуждений” [149, с.19]. Поскольку оценка полезности теории зависит от ее назначения, то для реализации различных целей можно воспользоваться по-

разному построенными теориями, то есть интуиционистская и классическая математики могут сосуществовать.

В споре теоретико-множественной и интуиционистской математики не оказалось победителя. Они существенно дополняют друг друга. С точки зрения философского системного синтеза, избегая крайностей ограничительной программы Брауэра можно исследовать конструктивность как вполне самостоятельный философско-математический предмет отдельно от самого вопроса математического существования. Выявляя наиболее существенные и важные черты имеющихся подходов к обоснованию, теперь нет необходимости сосредотачиваться только на одном пути обоснования, например, интуиционизма или формализма, отказываясь тем самым от других мощных приемов доказательства в математике, ограничивая и лишая практической силы теоретическую математику, использующую необычайной сложности структуры и множества. “Готов ли иной математик безоглядно следовать вместе с Гёделем путем платонизма, провозглашая истинность или ложность математических выражений, оперирующих подобными огромными множествами, всегда абсолютными (или “платонистскими”) по своей природе; или же он, не заходя слишком далеко, будет говорить об абсолютности этих понятий лишь в том случае, если множества окажутся не слишком велики и довольно конструктивны” [132, с.102]. По мнению одного из наиболее компетентных и плодотворно работающих физиков-теоретиков Роджера Пенроуза, ответ на этот вопрос не имеет большого значения, так как с физической точки зрения множества, которые имеют для нас значение, по меркам вышеупомянутых множеств выглядят относительно малыми. По этой же причине философов математики не должны излишне волновать отличия между различными платонистскими течениями в математике, хотя полезно различать логические и математические основания.

Если логические основания анализируют истинность математических принципов, содержащих аксиомы правил вывода, опирающихся на философские концепции природы, то в математических основаниях истинность подразумевается, а математические рассуждения должны быть не только систематическими, но и доступными пониманию с помощью хорошего выбора языка математики. Для многих достаточно богатых и важных математических теорий была доказана их “относительная непротиворечивость”, то есть такая теория непротиворечива, если непротиворечива теория множеств Цермело-Френкеля или арифметика Пеано натуральных чисел. Так исследования Г. Крайзеля показывают, что из непротиворечивости арифметики вытекает непротиворечивость математического анализа и существенных фрагментов теории множеств. Глобальный теоретический вопрос проблемы обоснования математики оказался, в связи с развитием компьютерных вычислений, более приземленным и практически важным вопросом, а так как компьютерные вычисления ограничены математическими ресурсами, то в таком контексте более привлекательной выглядит идея локальной непротиворечивости.

Вопрос о непротиворечивости математики, по мнению философа математики В.В. Целищева, можно рассматривать не только с точки зрения

дедуктивной математики, но и как эмпирический вопрос. “Основанием для такого мнения служит то обстоятельство, что более теоретические ветви математики получают поддержку со стороны элементарных ветвей, которые в свою очередь, принимаются благодаря приложениям” [171, с.44]. Однако, если говорить об убедительности законов арифметики, она вытекает не из практики счета, а из универсальных требований абстрактной или категориальной онтологии, поскольку нельзя смешивать применение математической истины с самой этой истиной. Философские категории в этом смысле представляют собой автономную и первичную сферу представлений, которую называют “категориальной онтологией”. Не преувеличивая роль теоремы Гёделя о неполноте, можно сказать, что гёделевский результат говорит, прежде всего, о том, что все множество арифметических истин не может быть перечислено машиной Тьюринга. Даже различие между интуитивной и формальной математикой реализуется в разном понимании концепции полноты.

Интуитивная деятельность математика направлена на достижение “дескриптивной полноты”, для которой методы логико-математического доказательства, при сопоставлении “реальности” и ее “модели”, в таком описательном понимании полноты несущественны. В отличие от интуитивного методологического подхода, в формальной системе появляется новый аспект, связанный с деятельностью математика по выведению теорем из аксиом, указывающий тем самым на “дедуктивную полноту”. Из невозможности строгого обоснования в рамках конкретных программ, вообще говоря, не следует невозможность других подходов, способных осуществить такое обоснование. При обсуждении природы математической истины более важное значение имеют не те дедуктивные средства, которые находятся в распоряжении математиков в конкретный исторический период, а то, в какой степени математики понимают соответствие математических утверждений из разных областей математики и соответствии математических моделей реальности. Напомним, что, используя правила вывода с бесконечным числом посылок, Г. Генцен сумел доказать непротиворечивость арифметики Пеано, а П.С. Новиковым было получено другое доказательство этой непротиворечивости.

Единство и целостность многообразия математических систем знания определяется действием “принципа соответствия”, согласно которому новые общие теории сохраняют свое значение и для прежних областей исследования. Именно этот принцип реализуется в системном синтезе программ обоснования математики. Поэтому, вполне естественно, что для обоснования математики необходимо несколько дополнительных друг к другу программ.

4.3. Системная триада философско-методологических программ обоснования математики

Современные математики склонны рассматривать свою науку как совокупность различных аксиоматически определенных структур,

позволяющих, с одной стороны, охватить все, что входит в математику на данный момент, а с другой – охватывающих больше, чем современное математическое сообщество способно осознать. Это связано, в первую очередь, с тем, что наиболее эффективные методы развития математического знания прошедшего столетия связаны со стремлением к совершенствованию структуры математики. Но весь опыт философствования XX века показывает, что серьезные трудности поджидают исследователя программ обоснования математики уже на первом этапе анализа. Это связано с тем, что сам предмет исследования представляет собой исторически сложившееся “культурное сцепление” различных направлений реальной математической деятельности.

Основные трудности системного обоснования математики связаны с методологическим анализом стратегий обоснования, поскольку наиболее известные классические программы обоснования ориентированы на различные задачи и цели математического исследования. Сошлемся на мнение специалиста по онтологическому обоснованию математики В.Я. Перминова, который утверждает: “Все программы обоснования математики являются априористскими в том смысле, что они постулируют абсолютную истинность некоторых утверждений и абсолютную надежность некоторых методов рассуждения. Они постулируют, таким образом, наличие обосновательного слоя, который не подлежит обоснованию вследствие своей абсолютной надежности” [139, с.78]. Поскольку сказанное относится ко всем программам обоснования, то их объединяет методологическая трудность определения природы и границ “онтологического слоя” в каждой программе обоснования математики. Например, нестандартный анализ, который нельзя отнести к какому-то одному философскому направлению в математике, способствовал формированию новых подходов к решению проблем математического анализа, что в свою очередь привело к противоположным точкам зрения на проблему обоснования математики. При создании нестандартного анализа наличие неоднозначного описания чисел, как идеальных объектов, математическими средствами было использовано для расширения множества действительных чисел таким образом, чтобы при этом сохранялись математические свойства “стандартных” чисел.

Это новое обоснование позволило реабилитировать нестрогие методы начала становления анализа бесконечно малых величин. В частности развитие нестандартного анализа показало, что чем эффективнее математическая теория, тем более абстрактный характер методологических понятий требуется для ее обоснования. Воспользуемся для обоснования математики философским понятием системной триады. Философское определение системы, включающее целостность как существенное свойство, рождалось в длительных методологических спорах, поскольку понятие целостности не удавалось объяснить в привычных для математиков и философов терминах. Напомним, что “система” есть упорядоченная совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, объединенных в единое целое, что тесно связано с понятием структуры, обозначающим внутреннее строение объекта в рамках целостного образования. В интеллектуальных структурах можно

выделить два типа целостности, во-первых, “дифференцированную целостность”, которая отличается особой структурой составляющих ее независимых частей, функционирующих более или менее автономно, а во-вторых, “интегрированную целостность”, когда составляющие ее части оказываются в состоянии стабильной взаимосвязи, хотя такое деление все же довольно условно. По мнению математика и методолога науки Р.Г. Баранцева в философии и методологии науки идет смена идеала, речь идет “о переходе к целостности как более фундаментальному понятию, чем полнота” [14, с.28]. Формальные описания различных сторон исследуемых теоретических моделей в таком контексте становятся важнейшими этапами на пути рационального постижения целостных объектов.

Могут ли в научном познании скрываться элементы иррационализма? При чисто логико-формальном подходе число цепочек, составленных из звеньев типа “посылка–вывод”, растет с их длиной, по меньшей мере, экспоненциально, тогда как те из них, которые приводят к решению, образуют исчерпывающе малую долю от этого числа. Каким образом можно выявить такое ядро в обосновании математики? Все программы обоснования математики, так или иначе, восходят к древнегреческой математике, а также к Георгу Кантору как некоему первоисточнику, хотя и в разной степени критикуют его подход. Философско-методологические дискуссии по поводу канторовских бесконечных множеств, аксиомы выбора, континуум-гипотезы и других аналогичных базовых понятий современной математики сводились к основному вопросу: “в каком смысле можно утверждать, что абстрактные математические понятия существуют?” Например, Георг Кантор, как последователь Платона, полагал, что математические идеи существуют в некоем объективном “мире идей”, не зависящем от человека. В частности это означает, что и математический платонизм тоже может быть полезен для обоснования и объяснения специфики математических истин.

В интерпретации известного математика и физика Роджера Пенроуза, взгляды которого на математические идеи вызывают большой интерес у философов науки, платонистский подход имеет вполне аргументированное право на существование: “Я не скрываю, что практически целиком отдаю предпочтение платонистской точке зрения, согласно которой математическая истина абсолютна и вечна, является внешней по отношению к любой теории и не базируется ни на каком “рукотворном” критерии; а математические объекты обладают свойством собственного существования, не зависящего ни от человеческого общества, ни от конкретного физического объекта” [132, с.104]. Неклассическая математика отличается от классической тем, что она не является полной в том смысле, что современному математическому анализу поддаются отдельные фрагменты процессов и явлений, исследуемые теорией, но не теория в целом со всей совокупностью ее основных принципов. Если бы математическая система Гильберта, основанная на формальном доказательстве вопроса о справедливости или ложности любого математического утверждения, была полной, то тогда существовал бы общий метод выяснения истинности любого такого рассуждения. Но это находилось бы в противоречии с

результатами Гёделя о том, что ни одна система, реализованная по схеме Гильберта, не может быть полной в обсуждаемом смысле. Полнота фактически достигается только на математических моделях, поэтому после работ Гёделя интерес к обоснованию математики несколько уменьшился.

Целостное познание как всеобщее единство включает в себя необозримое множество процессов, состояний и структур, существующих в их конкретности и целостности. Целостность и системность могут служить показателями достаточно высокого уровня развития мировоззренческого сознания. Системные соображения полезны для развитой математической теории, помогая убедиться в том, что глубокие противоречия в такой теории маловероятны. Они помогают прояснить степень достоверности содержательных выводов, основанных на рассмотрении эволюции математических теорий. В силу сложности абстрактных математических объектов и структур для исследования программ обоснования математики нужен определенный методологический подход. Такой методологический подход существует в теории познания и называется системным. Системный подход к обоснованию математики основан на понимании эволюции математических структур. “Системный подход” – это такое направление в методологии научного познания, в основе которого лежит рассмотрение исследуемых объектов как систем, ориентирующих на раскрытие целостности объекта, во всем многообразии его внешних и внутренних связей. Системный подход вытекает из исторического развития математических теорий и соответствующих математических структур, понимаемых как развивающиеся системы. Системные идеи позволяют по-новому взглянуть на проблему обоснования математики, с которой не может справиться редукционистский метод в обосновании.

Рассмотрим новую методологию обоснования математики, открывающую в рамках системной триадической структуры дополнительные возможности анализа природы математического мышления на основе хорошо известных основных философско-методологических программ обоснования современной философии математики: формализма, платонизма и интуиционизма. Новый подход, в свою очередь, потребовал уточнить понятие “математического платонизма” с точки зрения современного понимания математики. Несмотря на все попытки, философия математики, возникшая в начале XX века, не смогла строго очертить границы логико-онтологического обоснования математики. В связи с этим вполне естественным может оказаться вопрос, какого философского мировоззрения придерживаются математики? Математическое мировоззрение, которого придерживается известный логик и математик Н.Н. Непейвода, можно охарактеризовать как “умеренный скептический платонизм”. В отличие от “математического платонизма”, предполагающего, что математические понятия реально существуют в мире идей, он считает “данное воззрение профанацией платоновского взгляда и самопереоценкой человека и его научного мышления” [123, с. XXIII]. Умеренный платонизм не предполагает первичности математического платонизма, а состоит в признании активности субъекта и определенной совокупности его знаний и

представлений, имеющих исторический характер видения реальности. Системы, возникающие в реальном мире, являются реализациями общих идей, недоступных человеку, но математика дает возможность некоторого приближения к ним. Этой трактовки платонизма мы будем придерживаться в дальнейших рассуждениях. Под платонизмом понимался особый тип реализма, соотносящего математические понятия с идеями из определенного рода вневещной реальности. Согласно учению Платона, наблюдаемый нами мир, как мир чувственно воспринимаемых вещей, является лишь отражением “мира идей”, которые вечны и неизменны, в отличие от непостоянных и изменчивых чувственных вещей. С точки зрения платонизма, математические объекты реально существуют, а человеческий ум имеет уникальную способность их познавать.

Один из аргументов Аристотеля против концепции Платона состоит в том, что “идеальный мир” предназначен для того, чтобы с его помощью объяснить мир чувственно наблюдаемого, но как реализуется это объяснение – это тот мировоззренческий вопрос, на который Платон не дает убедительного ответа. Тем не менее, несмотря на теологические претензии, платонизм выжил благодаря математикам, которые предпочитают иногда называть его “скептическим платонизмом”. Напомним, что скептицизм – это лишь первый шаг умствования, а согласно Платону, именно с математики начинался путь бесконечного постижения истины. Ценность математической теории состоит в ее способности транслировать истину и переводить одну систему содержательных математических допущений в другую, благодаря логической совместимости своих принципов. Как формируются истинные утверждения при ответе на вопросы из области математики? Восприятие математической истины может осуществляться различными способами. Проблемой математической истины интересовались еще древнегреческие мыслители, которые в равной мере владели философским и математическим знанием своего времени. В XX веке эта проблема стала особенно актуальной после рефлексивных результатов австрийского логика Курта Гёделя. Он показал, что достаточно широкая система аксиом и правил вывода, содержащая арифметические теоремы, например, последнюю теорему Ферма, и свободная от противоречий, должна включать утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть в рамках формализма данной системы. Поэтому истинность таких утверждений не может быть выяснена с помощью методов, допускаемых этой формальной системой. В частности, из результатов Гёделя следует, что понятие математической истины не может быть заключено ни в одну из формальных систем.

Важнейшее условие, при котором была доказана теорема Гёделя о неполноте, состоит в непротиворечивости системы аксиом математической теории. Гёдель показал, что доказать непротиворечивость системы аксиом в рамках самой системы нельзя, то есть утверждение о непротиворечивости само по себе является неразрешимым. По существу вопрос идет о том, являются ли данные абстрактные понятия характеристиками реального мышления и в какой степени они являются стандартными нормами человеческого мышления, воплощенными в компьютерной программе. Следует предостеречь от излишне

радикального истолкования результата Гёделя, поскольку такой подход исходит из ошибочного допущения, что теоремы Гёделя истинны для всех формальных выражений, которые могут быть истолкованы в качестве утверждений о непротиворечивости теории. Развитие математики в направлении все увеличивающейся строгости, пониманию которой способствовал своими результатами Гёдель, а также критика математического платонизма привели к постановке до тех пор не стоявших философско-методологических вопросов. Например, “что такое конструктивный математический объект, то есть результат, как говорят, эффективного математического построения?” [20, с.130]. В частности, сюда же можно отнести и вопросы осуществимости математического доказательства, вычислимость математических формул, достижимость и реальность существования чисел. Поэтому достаточно убедительная философско-методологическая программа обоснования современной математики не может быть построена в рамках упрощенной теории познания. Постоянный философский интерес к теоремам Гёделя обусловлен тем, что само развитие математического знания подтверждает, что они говорят нечто методологически важное о пределах возможностей абстрактного мышления человека.

В связи с проблемой искусственного интеллекта человеческое мышление сопоставляется с возможностями компьютерного анализа, но, поскольку сами компьютеры являются продуктом человеческой деятельности, то фундаментальное различие между возможностями “творца” и его “творения” отчасти характеризуется теоремой Гёделя о неполноте. Этот результат состоит в том, что для арифметики Пеано строятся неразрешимые предложения, в силу чего его называют теоремой Гёделя о неполноте формальной арифметики Пеано натуральных чисел. В указанном контексте самого Гёделя можно охарактеризовать как убежденного платониста, даже если бы он и сомневался в абсолютности существования всех мыслимых математических конструкций. Возникающее при этом затруднение связано с тем, что понятия непротиворечивости и полноты используются и для характеристики мышления человека. В действительности Гёдель доказал, что математика – это не произвольные несистемные поиски, определяемые прихотью математиков, а нечто абсолютное, которое не изобретается, а открывается. Такая платоническая точка зрения была существенна для Гёделя, но не менее существенной она является в нашем подходе к проблеме обоснования математики. Еще в начале прошлого века философы математики были уверены в возможности редукции математики к логике, а к концу века математики и философы окончательно убедились в несостоятельности программы обоснования логицизма. В новый век философия математики вошла с убеждением, что содержание современной математики далеко выходит за пределы логических понятий, хотя математические идеализации, несомненно, обладают необходимостью для мышления. Все же именно смысл составляет сущность математики.

Системное обоснование математических теорий, безусловно, более абстрактно и более общезначимо, чем логическое, поскольку все программы

логического обоснования математики базируются на определенного вида редукции. Например, в интуиционизме, это редукция содержания математики к содержанию арифметики, а в формализме, это редукция проблемы непротиворечивости теории к проблеме непротиворечивости содержательной метатеории. Системный подход, по мнению философа науки Ю.В. Сачкова, дает новый взгляд на философско-методологическую проблему целостности. “Если ранее целостные представления об объектах исследования складывались исключительно на основе их внешних взаимодействий, на основе того, как они проявляют себя во внешних взаимодействиях, то системный подход дополняет изучение целостности анализом их внутренней дифференциации” [150, с.48]. Используя дополнительные внутренние связи и целостные свойства системы, получают ее определенное обоснование. Познание интересующих нас философско-методологических проблем через призму системного подхода может привести к более глубокому проникновению в сущность этих проблем. При всей философско-методологической значимости гёделевских результатов, следует отметить, что гёделевский метод рассуждения предполагает строго рациональное отношение к системе “неопровержимых” математических убеждений. Для построения целостной картины развития современной математики необходим предварительный философско-методологический анализ различных когнитивных факторов, поскольку любая программа обоснования содержит в себе как рациональные, так и иррациональные допущения. Реальная логика, являющаяся основой всякой рациональности, имеет в принципе иррациональные и неформальные аспекты, так как все ее содержание не может быть определено в символических системах.

Методологический сдвиг в решении проблемы обоснования зависит не только от достижений в логике и современного анализа генезиса аксиоматических систем, а, прежде всего, от углубленного понимания современных проблем философии математики и от расширения допустимых подходов к обоснованию математических теорий. Современная философия обоснования математики, как считает В.Я. Перминов, должна соединить в себе три разнородных положения. Он сформулировал их в виде следующих тезисов: тезиса об “идеальности и формальности математических структур”, представляющего математику как совокупность чисто мыслительных конструкций, ограниченных только требованием непротиворечивости; тезиса об “априорности исходных математических представлений”, которые заключены в традиционных разделах математики, таких как арифметика и элементарная геометрия; и тезиса о “реальности исходных математических представлений как непосредственно связанных с универсальной онтологией, лежащей в основе человеческого мышления” [138, с.9]. С онтологической точки зрения интересна идея Гёделя о реальном статусе специфических математических объектов существующих во внечувственном мире, которая может быть интерпретирована как указание на предметную онтологию. Она является выражением структуры мира, существующего независимо от математики, поскольку математические идеализации обусловлены реальностью в той же мере, что и законы физики. Следует признать, что формалистская

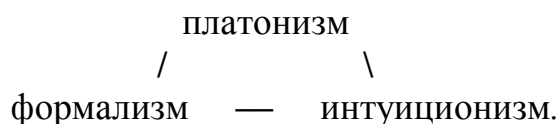
философия математики была в определенном смысле прогрессивной, поскольку появилась как естественная реакция на некритическую интуитивную манеру математического рассуждения.

Когда формализация стала пониматься как единственный способ получения истинного математического результата, то всякое содержательное мышление стало рассматриваться как не обладающее полной достоверностью. Это заблуждение пытались устранить с помощью интуиционистской философии математики. Но требование конструктивности всех допустимых объектов математики существенно ограничивает логические средства, применяемые в интуиционистской математике. В защиту интуиционизма все же необходимо сказать, что математическое мышление неизменно подтверждает гипотезу о первичности интуитивной и конструктивной основы математического рассуждения по отношению к его формально-символическому оформлению. Как направление в философии математики интуиционизм возник как реакция на сформировавшиеся к началу прошлого века математические тенденции, согласно которым математический объект можно было полагать существующим даже в тех случаях, когда не было никакой возможности воплотить этот объект в “математической действительности”. Хотя классическая математика была “наивно конструктивной” в том смысле, что если доказывалась теорема существования математического объекта, то при этом давался способ его построения. Признание несостоятельности отдельных программ обоснования не следует также отождествлять с невозможностью обоснования математики, хотя оно способствовало появлению некоторого скептицизма в отношении строгости самого математического мышления.

У работающих математиков нет определенных абсолютных убеждений относительно обоснованности математических конструкций и теорий или непротиворечивости используемых ими формальных систем. Более того, вряд ли, они задумываются над тем, “пользователями” каких именно конкретных формальных математических систем они являются. Неявные философско-методологические убеждения постепенно размываются по мере расширения формальных систем математики и все большей их удаленности от доступных интуитивному восприятию математических феноменов. Кроме того, задача обоснования математики в контексте проблемы надежности математического мышления не может быть решена без обращения к внелогическим критериям. В современной философии и методологии науки осознается недостаточность бинарных структур, хотя понятия, сложившиеся в бинарной парадигме, не всегда легко укладываются в триадическую структуру. “Триадой” называют совокупность из трех элементов, каким-то образом связанных между собой. Среди различных типов триад для целей обоснования математики выделим системные триады. По определению Р.Г. Баранцева, “системные триады” характеризуются тем, что их единство создается тремя элементами одного уровня, каждый из которых может служить мерой совмещения двух других. Для существования таких методологических триад необходимы определенные зазоры, связанные с общезначимым философским системным “принципом неопределенности – дополненности – совместности”, который можно

сформулировать следующим образом: “в системной триаде каждая пара элементов находится в соотношении дополнительности, а третий задает меру совместимости” [13, с.38]. Можно также предположить, что до тех пор пока этот философско-методологический принцип соблюдается, стремление к полноте не нарушает целостности.

Для обоснования математики триадический подход означает, что никакая часть математики не обладает особыми привилегиями, так как каждая известная программа обоснования математики основана на поисках той части математики, которая в рамках этой программы имеет особую надежность своих доказательств, свободных от противоречий. В таком контексте все три элемента системной триады потенциально равноправны, поскольку суждение о математической истине не опирается непосредственно на некоторую определенную программу обоснования математики. В современной философии математики можно выделить три основных программы обоснования математики: формализм, платонизм и интуиционизм, поэтому в качестве одной из формул системной триады можно рассмотреть следующую совокупность программ обоснования математики:



В ней используются понятия, уже сложившиеся в диадной парадигме “формализм – интуиционизм”. Но в системной триаде математическая истина не подчиняется какому-то одному общезначимому критерию, поскольку бинарные проблемы, сводящиеся к ответу “да – нет”, могут оказаться губительными для дальнейшего прогресса математики. Новое смысловое содержание определяется новой структурой программы обоснования математики. Профессиональный математик в своих работах, как правило, не придерживается единственной методологической доктрины, даже в одной математической работе можно найти элементы разных подходов. Поэтому правильнее и плодотворнее говорить не о методологической нестыкуемости таких подходов в рамках единого описания, а об их дополнительности, когда один из подходов позволяет лучше понять один из фрагментов математического текста, а другой, дополнительный к первому, лучше разъясняет другой фрагмент. Такие дополнительные описания могут способствовать целостному описанию математических феноменов. Напомним, что Нильс Бор ввел понятие дополнительности как раз в поисках единства теоретического осмысления нового знания. О целостности на основе генезиса тринитарного сознания, как методе научного исследования, можно говорить в различных смыслах, например, как об обобщении определенной теории, включающем в нее предшествующие теории, или как о широком объединении нескольких теорий, в котором сглаживаются их противоречия.

Суть системного подхода состоит в том, что с его помощью мы надеемся получить приемлемое обоснование непротиворечивости содержательных аксиоматических систем, выводя его из анализа логики их развития и выявляя их логическую надежность без обращения к свойствам формализованной

модели теории. Сама системная триада указывает на пределы обобщения своих понятий и допустимые пределы их абстрактности. Она определяет, каков должен быть уровень математической абстракции аксиоматической системы, чтобы построенная на ее основе теория находила новые области реальных эффективных приложений. Но хотя идея реальности важна для понимания исходных представлений математики, она не может ограничивать внутренние потребности развития математических теорий. На уровне такого понимания происходит “контакт” с платоновской идеальной математической реальностью, существующей независимо от человека и вне времени. Так, например, бесконечное множество можно рассматривать как реальный объект, то есть как завершенное единое целое, существующее не только в абстракции. Именно перекодировка понятий – формальность, априорность, реальность – составляет определенную трудность при смене парадигмы. Как утверждает Роджер Пенроуз, “нельзя создать такую систему правил, которая оказалась бы достаточной для доказательства даже тех арифметических положений, истинность которых, в принципе, доступна для человека с его интуицией и способностью к пониманию, а это означает, что человеческие интуицию и понимание невозможно свести к какому бы то ни было набору правил” [133, с.110]. В новой парадигме происходит смена методологического идеала от полноты к целостности, то есть речь идет о переходе с помощью системной триады программ обоснования математики к целостности, как более фундаментальному понятию в философии математики, чем полнота.

Полноту можно рассматривать как свойство формальной системы, которая должна схватывать интуитивное содержание математической теории. При таком подходе математики могут избавиться от методологических упреков в том, что они в качестве основы своих математических убеждений используют какую-либо необоснованную формальную систему. Поэтому формальное описание математической теории в системной триаде конструируется таким образом, чтобы ее “математическая реальность” адекватно соответствовала содержательным истинам. Рациональное знание, наиболее совершенным образцом которого, является математическое знание, дает возможность понять не только окружающий нас мир, но и реальные возможности самого человека. В математической постановке задачи полнота достигается фактически только в математических моделях, как говорят математики, при корректной постановке задачи. Понятие “корректного рассуждения” не всегда укладывается в рамки вычислительных операций, так как может таить в себе неизведанные пока глубины. Описывая реальное явление, мы задаем граничные условия, замыкая его в пространстве, а задавая начальные условия, замыкаем его во времени, стремясь к полноте формального описания этого явления. Когда мы пытаемся сохранить целостность, например, в некорректных задачах, то она сохраняется благодаря внешним связям в пространстве и времени. Но в теоретической математике в связи с “проблемой переусложненности” математических теорий, может наступить момент, когда абсолютизация начинает уводить математические модели из жизни. Вот тогда и должны напомнить о себе законы целостности познания.

Существенное отличие современной математики от классической математики состоит в том, что она не является полной в логическом смысле. Математическому моделированию поддаются лишь некоторые частные процессы, но не теория целиком во всей совокупности ее принципов, поскольку при исследовании математической модели используются также рассуждения, не носящие дедуктивного характера. В методологическом смысле полнота достижима, когда аксиоматика математической теории признается достаточной для воспроизведения всего ее значимого содержания. Например, хотя аксиоматика арифметики логически неполна и теоретически допускает неограниченное пополнение, никто из работающих математиков не идет по пути ее такого расширения. В контексте нашего исследования целостность пропадает, когда нарушается соразмерность компонент системной триады философско-методологических программ обоснования математики. Общий вывод из сказанного состоит в том, что философы должны снять неоправданные ограничения на программу обоснования математики, присущие первоначальной программе Гильберта. Обоснование математики само нуждается в обосновании, то есть в обосновании соответствия обоснования своей задаче. Здесь естественно возникают философские и собственно математические проблемы, поскольку обосновательная деятельность в математике состоит из двух относительно независимых уровней: математического и философского. Для решения любой философско-математической проблемы познания надо попытаться выявить принципы, приобретающие гносеологический статус в исторически стабильных разделах математики. Поскольку новых подходов к решению проблемы обоснования математики не приходится ждать от логики, то сосредоточимся на углублении философии математики, следуя общезначимой философской идее триадичности.

В своем философско-методологическом анализе будем исходить из общепризнанного факта особой достоверности математического знания и неправомерности отождествления математики с опытными науками. Системная триада, реализующая философскую тринитарную методологию, может послужить базовой структурой целостности программы обоснования математики. Исходными понятиями системного подхода являются понятия “элемента”, “структуры” и “целостности”. Системный синтез как методологический подход к программам обоснования проистекает из понимания эволюции математических структур. Главная роль современной математики – структурная. Именно структура теории, а также ее формальная гармоничность, вселяют уверенность в надежности теории, благодаря чему творения человеческой мысли, возможно, согласно платонизму являются творением самой природы. Для философии математики важно то, что математическая структура обладает собственными достоинствами и в качестве независимого от нас явления обнаруживает способность подсказывать новые идеи и новые вопросы. Поэтому при системном подходе математические теории исследуются не как готовые структуры, а как внутренне развивающиеся системы. Традиционная парадигма обоснования математики опиралась на

структурное или формальное представление математической теории как наиболее адекватно соответствующей постановке проблемы обоснования. В настоящее время философы математики постепенно осознали то обстоятельство, что формальная теория вторична по отношению к содержательной, в том смысле, что она может принимать только те факты, которые уже обоснованы с содержательной точки зрения. Содержательные математические теории, так же как и формальные, могут строиться аксиоматически, только аксиомы в содержательной теории – это истинные предложения, в которых важен смысл самих предложений, а не строчки формальных символов.

Уже во второй половине XX века выдающийся советский математик академик А.Н. Колмогоров, рассуждая о современных взглядах на природу математики, говорил о законности употребления термина “содержательная математика метаматематики”, хотя он и не является устоявшимся: “Эта математика метаматематики оказывается более широкой, чем “финитная математика” в строгом смысле. В некотором приближении можно сказать, что она по своему содержанию близка к упоминавшейся ранее “конструктивной математике”, но она значительно уже традиционной “канторовской” теоретико-множественной математики” [85, с.16]. Системное рассмотрение отказывается от исключительно формально-отражательного толкования математической теории. Системные триады содержат в себе широкие обосновательные возможности, которые в контексте методологии математики зависят от понимания статуса реальной логики и природы различных математических принципов, таких как, например, аксиома выбора. Напомним, что почти двадцать лет понадобилось на устранение в аксиоматике теории множеств таких противоречий как парадокс Рассела, путем включения в нее такого сильного математического средства как аксиома выбора. Но из-за этого некоторые формулировки теории множеств потеряли свою изначальную изящность. Статус аксиомы выбора, или аксиомы Цермело, сегодня ни у кого не вызывает сомнения, хотя в начале XX века ее применимость была предметом бурных философских споров. Но главная причина ее принятия математическим сообществом состояла в том, что без нее нельзя было доказать целый ряд важнейших результатов математического и функционального анализа, необходимых математикам в их работе. Справедливости ради, следует отметить, что наиболее интересные находки в математическом анализе обычно весьма живучи, в том смысле, что излечимы от технических ошибок в доказательствах, хотя и требуют иногда уточнений и расширений условий теорем.

Недостаток традиционных программ обоснования математики состоял не в их претензии на абсолютность, а в отсутствии методологической теории оправдания абсолютности, присущей по своей природе математическому мышлению. Известный математик и философ математики академик Н.Н. Лузин, пытаясь снять необоснованные ограничения на внутренние математические определения теории множеств, полагал, что наряду с некоторыми

эффективными в математике понятиями теории множеств, последняя содержит в себе понятия, не имеющие реального наполнения, несмотря на их приемлемость в логическом и математическом отношении. “Одно из самых уязвимых мест канторовской концепции – это понимание экзистенциальных математических высказываний, то есть высказываний о существовании математических объектов” [61, с.58]. Поэтому теоретико-множественный подход в духе Кантора уводил математическое мышление в сторону математического платонизма. В таком контексте, даже если посторонние аксиоматической теории по своей форме индуктивно, интерпретации этой теории могут быть вполне платоническими. Например, вера Курта Гёделя в то, что континуум-гипотеза либо истинна, либо ложна, вне зависимости от того способны ли математики доказать ее или опровергнуть, позволяет причислить его к приверженцам платоновской идеи в математике. Хотя, например, такой авторитет в математической логике как Пол Коэн, обосновавший недоказуемость континуум-гипотезы, не разделял взглядов Гёделя, полагая, что теория множеств – это не более чем аксиоматическая структура, а не частная модель внешнего мира. Несмотря на различные мнения об аксиоматически построенных теориях, формальная программа Гильберта сыграла выдающуюся роль и оказалась наиболее продвинутой как в самой современной математике, так и в вопросах обоснования математики.

По заключению специалиста по математической логике и теории алгоритмов И.А. Лаврова, “в ней удалось систематизировать весь накопившийся в математике опыт исследований и решений трудных математических проблем. Под этот необозримый материал была подведена разумная философия осмысления достигнутого, что, в свою очередь, помогло строго математически поставить такие вопросы обоснования, которые ранее лишь предугадывались” [97, с.15]. Признавая важность теоремы Гёделя о непротиворечивости, отчасти накладывающей в методологическом смысле существенные ограничения на программу Гильберта, философы математики сейчас пытаются избежать ее излишне радикального истолкования, как закрывающей путь к финитному обоснованию отдельных математических теорий вообще. Таким финитным обоснованием для арифметики является ее интуиционистское представление. Если опираться на содержательную интерпретацию логических операций, которые тоже являются элементами формализованной теории, может появиться возможность нахождения такого содержательного финитного рассуждения, которое обеспечит обоснование математической теории, хотя оно может и не обладать свойством арифметизируемости. Постгёделевская философия математики разных направлений, несмотря на очевидную эффективность аксиоматически построенных теорий, в начале породила серьезные сомнения в существовании непротиворечивых формальных описаний. Философско-методологические открытия Гёделя положили начало многочисленным исследованиям возможностей формализованного метода познания. Дело в том, что ограничительные результаты математической логики не исчерпываются теоремами Гёделя о неполноте, а продолжают в таких философских

исследованиях, как актуальные проблемы “разрешимости – неразрешимости” и “определимости – неопределимости”, а также “полноты – неполноты” и, более общо, доказуемости и истинности.

Тем не менее, это не дает оснований для противопоставления рассудочного и содержательного способа познания, поскольку идеи Гёделя можно трактовать как отказ от строгого анализа оснований и возвращения к исторически сложившейся манере изложения математических теорий, ориентированной на убедительность восприятия их предпосылок и выводов. Гносеологические выводы из гёделевских результатов философы математики делают с должной осторожностью, так как целостный смысл в контексте синергетической методологии достигается в синтезе различных аспектов внутренней структуры программ обоснования математики. Относительная неудача основной идеи Гильберта о доказательстве непротиворечивости теории средствами формального языка выявленная в теореме Гёделя о неполноте арифметики натуральных чисел, вообще говоря, вовсе не умаляет значимости для развития математики программы Гильберта. Наоборот, такое понимание отмечает тупиковые пути решения подобного рода проблем и подсказывает возможные пути дальнейшего направления исследований в философии математики. Теория множеств лежит в основе всех математических наук и практически все математики верят в то, что она непротиворечива. Эта вера основана на том, что многовековой опыт работы математиков пока не давал повода для сомнений в непротиворечивости математики, частью которой является канторовская теория множеств. Результаты Гёделя, с точки зрения философии, демонстрируют нечто большее. Они доказывают, что способность человека к постижению сути вещей невозможно свести к, какому бы то ни было, набору дедуктивных правил. Сенсационный результат Гёделя указывал на относительную слабость избранных логических средств, чтобы с их помощью можно было решать кардинальные вопросы обоснования теорий.

Известный логик Н.Н. Непейвода резюмировал сложившуюся ситуацию в философии математики как “вызов логики и математики XX века”. Довольно эмоционально он высказался в том духе, что “теорема Гёделя о неполноте является почти что красной тряпкой для тех, кто желал бы придерживаться иллюзии, что наука всесильна, идущей еще от просветителей и иллюминаторов. Поэтому нет числа попыткам ее обойти (хотя способ ее обойти известен неформально еще со времен эллинов: не включайте в теорию ничего лишнего, не стремитесь к абстрактной общности, не все усиливайте, что может быть усилено, и система может оказаться разрешимой как, например, элементарная геометрия)” [124, с.121]. Тем не менее, нельзя создать такую формальную систему логически обоснованных математических правил вывода, которой было бы в принципе достаточно для доказательства всех истинных теорем элементарной математики. Поэтому если говорить о наиболее продвинутой программе в современной математике, а именно, формалистской программе, то ее расширения, с учетом гёделевских результатов, должны проходить через пересмотр принципов построения метатеории и допустимых логических средств. В содержательных расширениях теорема Гёделя не имеет силы, так как

они не поддаются представлению в арифметизированной метатеории. Первые примеры верных, но недоказуемых в арифметике Пеано реальных математических утверждений о натуральных числах были получены Джефом Парисом. После двухсотлетней попытки зафиксировать постулаты, на которых основано дифференциальное и интегральное исчисление, он вместе с Лео Харрингтоном в самом конце 70-х годов прошлого столетия доказал, что они не могут быть сформулированы в логико-арифметическом языке. Поэтому можно сказать, что он создан “из ничего”, но это не означает, что он создан «ничем», поскольку наиболее ценные его результаты получены благодаря центральной смысловой категории математического анализа – понятию актуальной бесконечности.

Господствующая в современной математике идея происхождения математических объектов из единого пустого множества больше не воспринимается как единственно верная. Ограничение сферы надежной метатеории арифметизируемостью и финитностью требует пересмотра программ обоснования через выявление онтологических оснований математического мышления в различных областях современной математики, что в свою очередь потребует привлечения новых подходов к гносеологическим критериям. Наряду с аналитическим движением вглубь математики возникает потребность понять не только те части, из которых состоит изучаемая сфера науки, но и понять целое. Существуют специфические законы целого, а также его свойства, которые нельзя объяснить на языке его составных частей, поскольку именно целое детерминирует части, выступая причиной их существования. При анализе реальной информации о функционировании системы, ее нельзя рассматривать абстрактно от ее среды, как образно заметил философ и культуролог М.С. Каган: “Функциональный аспект системного анализа подобно двуликому Янусу, смотрит в недра исследуемой системы, стремясь раскрыть механизм ее внутреннего функционирования, взаимодействия ее элементов, и в окружающую эту систему мир, в ее реальную среду, взаимодействие с которой составляет внешнее функционирование системы” [70, с.38]. В методологии науки обосновано, что системный подход помогает преодолеть ограниченность аналитического подхода в различных областях знания, благодаря способности ученых моделировать целостности, не сводящие целое к механической сумме бесконечно умножающихся частных. Заметим, что философские поиски Блеза Паскаля начинались с максималистских требований целостного знания, дающего в достаточно полном объеме знания о человеке и мире, не оставляющие людей в полумраке неведения “начала начал”. Но мы до сих пор не знаем что такое человек как целое, то есть изначальной целостности мы не знаем.

Философский подход к пониманию целостности современной математики заключен не только в ней самой, но и в философском понимании бытия, точнее в онтологии, которая рассказывает о том, что вообще есть бытие. Рассматривая математическую теорию в целом, можно, говорить как об онтологически истинных теориях, так и о логически непротиворечивых теориях. При этом

необходимо разделить онтологию на систему идеализаций, связанных с математически-познавательной деятельностью, и на систему формальных математических структур, базирующихся на онтологических представлениях. Так, например, арифметика как формальная система, основанная на идеализациях, относящихся к онтологии, а теоретико-множественная аксиоматика уже не обладает статусом аксиом арифметики, несмотря на предельную убедительность в своей истинности. Можно говорить о целостной системе онтологических категорий, включающей категории пространства и времени, случайности и необходимости, реальности и виртуальности и т.п., в том смысле, что все эти категории описывают аспекты актов деятельности в его онтологических предпосылках. Поскольку трудно учесть все формализуемые аспекты программ обоснования, то онтологическое обоснование современной математики, скорее всего, маловероятно. Однако в самой математике гильбертовская программа формализма позволяет универсальным образом рассмотреть все имеющиеся в настоящее время результаты и методы присущие математическим направлениям. Различные философские взгляды на источники человеческого знания и трудности математического познания, опирающегося на онтологическое единство знаковых конструкций, обусловили различные, на первый взгляд, несовместимые точки зрения на основания математики.

Подводя итог спору между интуиционистами и формалистами, крупнейший математик Рихард Курант сказал: “При всем уважении к достижениям, завоеванным в борьбе за полную ясность основ, вывод, что эти расхождения во взглядах или же парадоксы, вызванные спокойным и привычным использованием понятий неограниченной общности, таят в себе серьезную угрозу для самого существования математики, представляются совершенно необоснованными” [96, с.242]. К сожалению, трудно обозримое содержание современной математики не удается уложить в простые рамки «кантовской» философии математики, согласно которой математические понятия можно рассматривать как объекты сферы «чистой интуиции», независимой от различных актов мыслительной деятельности человека. Естественно, что представители современного математического интуиционизма не полагаются на чистую интуицию в кантовском понимании. Однако многие понятия и методы, важные для математики, не могут быть реконструированы в соответствии с требованиями интуиционистской программы. Например, интуиционисты признают счетную бесконечность, как доступную интуиции, но такое фундаментальное понятие, как числовой континуум, с их точки зрения, следует исключить из употребления, но при этом то, что остается в математике тоже оказывается очень сложным, без надежды на существенное упрощение. Не обязательно требование конструктивности математических объектов ограничивает логические средства современной математики. В частности, это означает, что интуиционистская программа обоснования математики не всегда согласуется с реальной практикой математики. В формалистской программе обоснования математики математическим понятиям не приписывают никакой интуитивной реальности. Их главные работы сосредоточены на формальной логической правильности процесса рассуждений, базирующихся на принятых

Гильбертом постулатах. Отчасти такой подход представляет собой большую свободу действий, по сравнению с интуиционистской позицией, как для математических теорий, так и для их приложений.

В связи с этим обратим внимание на интересную философскую работу английского математика Брайана Дэвиса “Куда идет математика?”. В ней обосновывается, что к концу прошлого века точнейшая из наук испытала потрясения, которые могут принципиально изменить характер полученных в ней результатов. Логические прозрения Курта Гёделя привели в 1930-е годы к первому из трех кризисов, о которых идет речь в этой работе. Следует все же заметить, что критика формалистской программы, исходящая из теорем Гёделя, не может быть признана вполне корректной еще и потому, что она приписывает гёделевским теоремам большую общность, чем та, которой они обладают по логике своих доказательств. По предположению Брайана Дэвиса, начиная с 1970-х годов, в математике произошли еще два кризиса, столь же непредсказуемые, как и кризис, вызванный работой Гёделя. “Оба они связаны с проблемой переусложненности: доказательства стали настолько длинными и сложными, что ни один ученый не взял бы на себя смелость однозначно подтвердить или оспорить их правильность” [183, с.1351]. В философской литературе эти кризисы в такой постановке проблемы не обсуждались. Самым революционным техническим изобретением прошедшего века можно считать компьютер. Этот инструмент, первоначально создававшийся для математических расчетов, позволил проводить математическое моделирование огромного класса физических, и социальных процессов. Появление компьютеров не только изменило лицо цивилизации, но и породило сомнение в методологической обоснованности машинных доказательств теорем.

Как применять такие результаты? Основная методологическая идея состоит в том, что это способ получения новой информации, которая не заметна в обычном строго математическом формализме. Второй кризис относится как раз к тем доказательствам, которые проводились с использованием компьютера. Соответствующую проблему можно сформулировать так: можно ли считать математическим доказательство, которое выполнено на компьютере? С одной стороны, “кризисы переусложненности” носят эпистемологический характер и вроде бы не связаны с онтологией математики, но, с другой стороны, если рассматривать математику как созидательный процесс, то ее можно уподобить архитектуре, как это делала группа Бурбаки. Но тогда эти кризисы можно интерпретировать как кризисы человеческой мысли, когда архитекторы науки осознали, что невозможно построить многокилометровое сооружение и поэтому нет смысла обсуждать, какими свойствами устойчивости они бы обладали. По поводу кризиса, связанного с применением компьютера в доказательстве теорем, можно сказать, что никакой ясности в эту проблему внести пока не удалось, поскольку нет реальных технологий доказательства корректности компьютерных программ. Третий кризис переусложненности в определенном смысле для математиков более серьезный, так как связан с излишней сложностью доказательств некоторых знаменитых математических проблем. Решение такой математической задачи,

сформулированной в нескольких предложениях, может занимать десятки тысяч страниц математического текста. Как в таком случае оно может быть полностью понято отдельно взятым математиком, пусть даже самой высочайшей квалификации?

Напомним, что главные споры между исследователями философии математики ведутся вокруг особого статуса математических объектов. Если принять гипотезу об их существовании в некоем абстрактном платоновском мире, то непонятно, как мы, живущие в реальном пространстве и времени, можем что-либо знать о них. Кроме того, существует множество других тонкостей, которые нельзя не принять в расчет. Известный последователь платонистских воззрений Роджер Пенроуз указывает на такую важную философскую проблему: “... в рамках платонизма можно поставить вопрос о том, существуют ли в реальности объекты математической мысли или это только лишь понятие “математической истины”, которое является абсолютным” [132, с.101]. Удивительно как, не имея прямого доступа к таким объектам, мы, тем не менее, можем силой логического разума приходить к определенным заключениям относительно них? Например, существование фрактального множества Мандельброта есть его свойство абсолютной природы, не зависящей от математика или компьютера, которые его исследуют. Поэтому такая независимость от математика множества Мандельброта обеспечивает ему чисто платонистское существование. Даже некоторые профессиональные математики, такие как Брайан Дэвис, критиковавшие позицию последователей Платона, признают сегодня объективное существование математических объектов, имеющих строго определенные свойства. Три основных направления в современной философии математики – формализм, платонизм и интуиционизм – образуют системную триаду обоснования математики. И все же почему для методологии целостного подхода к обоснованию математики в качестве структурной единицы избрана именно триада?

Необходимость такого выбора обусловлена тем, что диады “формализм – интуиционизм” было явно недостаточно, а из более сложных структур она наиболее простейшая и достаточно содержательная в отличие от других искусственных и поверхностных интерпретаций. Тем не менее, достаточность тернарной структуры пока остается под вопросом, хотя и существуют определенные основания в математике, физике и философии для выделения таких структур. Более существенная аргументация, по мнению Р.Г. Баранцева, – это существование “универсальной семантической формулы системной триады”, состоящей из таких элементов как “рацио”, “эмоцио” и “интуицио”. Системный подход как целостное проявление должен вернуть единство в понимание современной математики, утраченное интуиционистами и формалистами, как бы ни были различны точки зрения на проблемы обоснования математики, питаемые теми или иными математическими традициями. Совместный анализ этих противоположных начал и борьба за их синтез в духе новой тернарной методологии обеспечивает полезность и ценность философии математики собственно для математики. Поэтому так

важно было исследовать с философской точки зрения сущность формалистских и интуиционистских ограничений с целью их возможной разумной либерализации. Из анализа проблем оснований математики можно сделать следующий философско-методологический вывод: процесс развития математики, а также уточнение оснований математики, никогда не будет завершен, так как познание бесконечно.

В философии науки совокупность предпосылок, определяющих конкретное научное знание и методы его обоснования, признанные достоверными на определенном этапе развития науки, принято называть парадигмой. В традиционной парадигме математические структуры рассматриваются с точки зрения таких дихотомических оппозиций как дискретное – непрерывное, конечное – бесконечное, формальное – реальное и т.п. Дополнительность сторон этих оппозиций способствует формированию методологически значимой третьей компоненты, обеспечивающей целостность в контексте тринитарной методологии познания. Проблема целостности обсуждалась в философской литературе, благодаря чему было выделено два типа определений понятия целостности. В одних определениях указывался набор дополнительных друг к другу характеристик, на основании которых можно было судить о целостности как обобщающей функции по отношению к достигнутому уровню познания. В других определениях целостность выступает в роли ориентиров, обозначающих направление движения научного мышления. В контексте философской идеи триадичности более адекватным будет определение целостности второго типа, которую невозможно познать во всей его специфике, если исходить только из внешних характеристик по отношению к исследуемой проблеме обоснования математики. Анализ функционирования понятия целостности невозможен без рассмотрения некоторых аспектов соотношения целого и части, поскольку реальное познание логически движется только в одном направлении от частей к целому.

Тринитарной методологии хорошо соответствует философский “принцип субадитивности”, согласно которому “целое меньше суммы частей”. Методолог науки Б.Г. Юдин интерпретирует его следующим образом: “Говоря о том, что целое меньше суммы частей, мы прежде всего имеем в виду невозможность выведения данных частей из объемлющего их целого” [177, с.88]. Иначе говоря, принципы конструирования объемлющего целого не должны привноситься из этого целого. Когда говорят, что целое не сводится к сумме частей, обычно ссылаются на взаимодействие между частями и реже упоминают внешние связи. Другую методологическую направленность имеет “принцип супераддитивности”, формулируемый как “целое больше суммы частей”, включающий относительную независимость целого от части, что более естественно для гуманитарного знания. В последнем случае части могут быть объяснены из целого, что наиболее характерно для диад. Для анализа целостности программ обоснования математики – формализма, платонизма, интуиционизма – применение принципа субадитивности вполне оправдано тем, что он приложим к исследованию конкретных проблем. Кроме того, правомерность использования принципа субадитивности основана на том, что

отдельные программы обоснования, входящие в целостную триаду, сами по себе не являются исчерпывающими характеристиками. Почему мы считаем, что целостному подходу соответствует триада программ обоснования математики? Во-первых, число три обладает высоким приоритетом, поскольку триединство удивительным образом сохраняет значение в культуре наших дней. Во-вторых, основное значение триады состоит в том, что она фиксирует начало синтеза, соединяя воедино противоположные начала. Полярные качества диады по своей природе плохо согласуемы, но когда мы игнорируем эту несогласованность и говорим о “золотой середине”, в которой пытаемся найти решение проблемы, то мы тогда обращаемся к системной триаде, которая несет в себе потенциальную возможность согласования.

Структурирование понятий по принципу триады имеет множество вариантов. Например, в такой фундаментальной диаде как “пространство – время” на пути к целостности через триаду “пространство – закон – время” раскрывается возможность причинно-следственного описания мира. Учитывая, что в пространственно-временной точке вариация масштаба раскрывает своеобразные миры на разных уровнях самоорганизации материи, то в результате получается еще одна триада “пространство – масштаб – время”. Несколько тысячелетий назад представление о триединстве Мира возникло у Платона. Кроме того, вполне уместно заметить, что идея тринитарности является основным догматом христианства, а троица – излюбленное число героев мифологии. Как считает идеолог тринитарного мышления Р.Г. Баранцев, переход от диад к триадам позволяет заново взглянуть на суть диалектики, которая, вообще говоря, не привязана исключительно к дихотомии, а допускает изучение многомерных систем, включая тройные. Он полагает, что “тринитарная методология не заменяет, а развивает диалектику, раскрывая ее внутренние возможности” [14, с.54]. С точки зрения математики, треугольник – это двумерный симплекс, то есть простейший выпуклый многогранник данного числа измерений, а именно двух. Он примечателен тем, что три точки, образующие его вершины, с одной стороны, могут рассматриваться как самостоятельные элементы, а с другой стороны образуют нечто целое в виде простейшей геометрической фигуры. Отсюда, возможно, и возникла философская идея триадичности, а то, что, осознав ее, люди стали мыслить пространственно, хорошо отражено в разнообразных тринитарных метафорах.

Используя понятие системной триады в обосновании математики, мы опираемся не только на естественный процесс внутреннего вызревания математических теорий, но и на новое понимание содержательного математического рассуждения, которому логическая парадигма отказывала в доказательности. Если математику нельзя обосновать в самой математике, то это не означает, что ее нельзя обосновать вообще, поскольку при построении абстрактных теорий математики используют не только математические, но и нематематические аргументы. Хорошо известно, что творческая интуиция математика привносит в математику недедуктивные и иррациональные моменты, уподобляющие ее музыке, поэзии и искусству. Поэтому все возможности обоснования математики, несмотря на скептицизм относительно

абсолютно надежного обоснования, еще далеко не исчерпаны. Анализ наиболее успешно функционирующих программ обоснования современной математики, а именно, формализма и интуиционизма, или его популярной разновидности конструктивизма, показывает, что в философии математики последних десятилетий все более важное место занимает “проблема реализма”, заключающаяся в определении реальной основы математических понятий, структур и методологических принципов. Понятие “реализма в целом” включает в себя все программы обоснования математики, стремящиеся выявить или установить связь между математическими абстракциями, математическими структурами, математическими теориями и соответствующими отношениями реальности. В таком контексте мы говорим об “умеренном скептическом платонизме” как об особом типе реализма, соотносящего математические понятия с определенными идеями внечувствительной реальности. Такой интерес к онтологии в философии математики произошел благодаря изменению в целом современного математического мировоззрения.

Самое непостижимое в окружающем мире – это то, что он постижим на математическом языке. Однако если рассматривать математические конструкции как произвольные творения человеческого ума, то тогда вопрос о причинах “непостижимой эффективности математики” нельзя даже разумно сформулировать. В современной математике наиболее распространен “позитивистский” подход, состоящий в рассмотрении математических теорий как некоторых формальных конструкций, и поэтому вопросы о мировоззренческом статусе используемых математиками понятий и методов можно считать ненаучными. К подобным подходам можно отнести, прежде всего, аксиоматический метод, развитый Гильбертом. Позитивизму противостоит интуиционизм, который близок к “номинализму” – подходу в вопросе об основаниях математики, состоящему в предположении, что математические понятия являются результатом абстрагирования и обобщения свойств реального физического мира. При таком подходе математические факты – это конструктивные объекты или, по существу, такие же экспериментальные результаты, как и факты естествознания. Номиналистские рассуждения близки по духу не только тем, кто придерживается конструктивистской точки зрения на основания математики, но и тем, кто стоит на формалистской позиции. Поэтому номинализм как философское воззрение противостоит платоновскому реализму понятий. Для “реалиста”, мировоззрение которого восходит непосредственно к Платону, мир наполнен идеями. Их реальность отлична от реальности “конструктивистов”, для которых математические объекты существуют исключительно в разуме математика.

Многие крупные математики, пытавшиеся понять статус математических понятий, склонялись к тому или иному варианту платонизма, или реализма. Например, такой авторитет как Анри Пуанкаре считал, что “канторианцев” можно считать реалистами именно в том, что относится к сущностям математики. Возможность крупным математикам увидеть будущее математики служит хорошим аргументом в пользу того воззрения на математику, которое принято называть “математическим реализмом”. Вера в математические

сущности – это результат опыта работы математиков, что представляется веским аргументом в защиту математического реализма, принимающего все ценности традиционной математики. В этой вере начинают сомневаться лишь при столкновении с трудностями теории множеств. Как пояснил Пол Коэн, “если эти трудности особенно смущают математика, он спешит под прикрытие формализма, предпочитая, однако, в спокойное время обретаться где-то между двух миров, наслаждаясь лучшим, что есть в обоих” [88, с.171]. Приятное преимущество реализма состоит в том, что он избавляет от необходимости обоснования аксиом теории множеств. Поскольку развитие математики показало недостаточность гильбертовского подхода к обоснованию даже в пределах самой математики, то математика неизбежно должна быть содержательной и человеческой или, в духе платонизма, даже “сверхчеловеческой”.

Процесс обнаружения истины есть переход от сокрытого знания к явному знанию. Математики уже примирились с тем, что любая непротиворечивая система аксиом не может дать ответ на все возникающие в ее рамках вопросы. Похожая ситуация имеет место в физике элементарных частиц, которая не отвергает предположения о бесконечной сложности материи. Расширение физического знания происходит путем добавления новых физических законов, которые можно рассматривать как систему физических аксиом, подобно тому, как добавление новых математических аксиом позволяет ответить на некоторые ранее неразрешимые вопросы. Физик-теоретик М.И. Каганов и специалист по математическому анализу Г.Я. Любарский, считающие, что, по крайней мере, в настоящее время, аксиоматизация физики представляется ненужной, тем не менее специально подчеркнули, что “все выводы, которые удастся получить с помощью неполной системы аксиом, являются истинными, коль скоро истинна каждая аксиома используемой системы” [71, с.97]. К этому можно добавить, что теорема Гёделя о неполноте не может опровергнуть ни одной из уже добытых математических истин. Для поколения, воспитанного на скептицизме, словосочетание “абсолютная истина” представляется неким анахронизмом. Это касается и абсолютности математической истины. Достаточно указать на различные мнения относительно абсолютной истинности утверждений о бесконечных множествах. Например, хотя уже общепринято, что теория множеств в некотором смысле унифицирует современную математику, она не является ее онтологическим основанием и, возможно, однозначно понимаемое обоснование современной математики вообще недостижимо. В контексте обоснования математики это впоследствии привело к либерализации и ослаблению ограничительных требований, допустимых с точки зрения онтологической истинности математических представлений.

Даже для установления математической истины отдельно взятый математик не применяет изначально только те алгоритмы и методы рассуждений, которые он полагает хорошо обоснованными. Но математические истины вовсе не являются интуитивными догадками, поскольку быстро теряют этот статус, превращаясь в доказанные теоремы. Отказ от претензий понимания

природы вещей в себе, от постижения окончательной истины, от разгадки сущности мира, может быть, психологически тягостен для некоторых энтузиастов, но на самом деле он оказался плодотворным для развития научной мысли. Задача философии математики состоит как раз в том, чтобы избавиться от “пустого скептицизма”, препятствующего выявлению оснований математического мышления и допустимых подходов к обоснованию математических теорий. Мнения о возможной противоречивости математической теории исходят от философов математики, поэтому ее обоснование не является для математиков проблемой первостепенной важности. Математики, отбросив свои философские воззрения, могут прийти к согласию, поскольку в математике достаточно областей, где можно получать сильные результаты традиционными методами. Но если они не хотят потерять перспективы целостного понимания, математика не может не иметь альтернативных теорий обоснования в духе разумного компромисса.

В центре внимания философии математики XXI века, по-прежнему, находится “работающая математика”. Безотказная эффективность современной математики возможна лишь потому, что она представляет в своих теориях объективную реальность. Что касается различных подходов к обоснованию математики, то они, вообще говоря, представляют собой одинаково возможные способы рассматривать математическую деятельность, связывая ее в философском единстве с другими областями знания. Современная философия математики исходит из множественности способов объяснения изучаемых явлений, поскольку вынуждена признать не только ее ограниченность, но и неполноту. В широком смысле проблема обоснования математики не получила пока разрешения, поскольку в настоящее время философы математики пришли к пониманию того, что ее решение лежит за пределами чисто логико-математического подхода и относится к интеллектуальному оснащению математического знания.

Смешение логических и математических оснований, а также подсознательное принятие математиками формалистских взглядов, проникших в современный математический здравый смысл через гильбертову терминологию, привело к смещению философско-математических оценок, в которых стала преувеличиваться ценность формальной математической работы и преуменьшаться методологические возможности строгой неформальной работы. В современной философии математики были выделены альтернативные методологические программы, поскольку идея обоснования математики исключительно одним только методом, не обладающим полной строгостью, оказалась нереализуемой. В связи с этим, произошла трансформация процесса философского исследования с классического способа построения единой или обобщенной теории обоснования математики на системный анализ множественности концептуализаций. С философской точки зрения такой подход более привлекателен тем, что увеличилось значение

философско-методологических разработок в конкретном историческом контексте.

Теоретико-множественная парадигма философии математики является господствующей во всей современной математике. Вместе с конструктивной математикой ее оказалось вполне достаточно для успешного функционирования математики XX века. Демаркационная линия формализма и интуиционизма в математике зависит от философских программ, так как, что считать в них логикой, а что математикой определяется в значительной степени целями философско-методологического исследования, например, в разном понимании концепции полноты. Философской интерпретацией первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики является убеждение, что теоретико-числовая истина превосходит доказуемость в арифметике, поэтому методологически оправдан переход от полноты к более фундаментальному понятию целостности. Хотя вторая теорема Гёделя о неполноте ставит под сомнение способность человеческого разума к доказательству непротиворечивости сложных формальных систем. Благодаря гёделевским результатам в современной философии математики стал возрождаться математический платонизм.

Единство программ обоснования, не стремящихся к чисто формальному единству, основано на том, что математика будущего не может иметь никакого иного онтологического основания, кроме того, которое уже зафиксировано в рамках существующих теорий обоснования. Целостная картина строения математики невозможна без теоретико-множественной концепции в ее содержательном и формализованном варианте, даже если ее нефинитная часть нуждается в более тщательном обосновании, хотя проверяемость интуиционистской математики, при большом числе операций тоже имеет условный характер. Поэтому математикам симпатична концепция платонизма, согласно которой математические идеи гармоничны и совершенны внутри себя, что проявляется в непостижимой эффективности математики, оперирующей с огромными абсолютными множествами, всегда “платонистскими” по своей природе. Если математики в своей практике никогда не столкнутся с противоречием, то им, вообще говоря, безразлично противоречива какая-то аксиоматика или нет, что не дает им оснований усомниться в безгрешности арифметики Пеано.

В философии математики существует множество мнений о природе математики, немалая часть которых спекулятивна и необоснована, поскольку не опирается на рассмотрение самой математики во всей ее общности и взаимных связях. До рефлексивных результатов Гёделя о неполноте неявно предполагалось, что математическая теория должна быть полной и непротиворечивой. Курт Гёдель показал, что полна и непротиворечива только “чистая логика”, а достаточно содержательная конкретная математическая теория неполна, а кроме того, непротиворечивость математической теории, включающей понятие натуральных чисел, не может быть доказана средствами самой теории. Эту философско-методологическую идею можно уточнять многими неэквивалентными способами с помощью дальнейших соглашений. Поскольку выбор формализма не единственен, то можно использовать и

интуиционистскую теорию множеств с соответствующей интуиционистской логикой, какие-то “промежуточные” варианты или новые версии теории множеств. Математики, по существу, развивают свою науку дополнительными путями: “тактики” решают задачи, по-новому комбинируя традиционные рассуждения, а “стратеги” для тщательного анализа проблемы строят общие теории, которые на первый взгляд несоразмерны с исходной задачей.

Математические теории развиваются, сохраняя единство разнообразных ветвей математики, согласуясь с физической реальностью, и каждый раз на новом мировоззренческом уровне возвращается к целостному философскому пониманию мира. Эффективность математики, хорошо приспособленной для формулировки физических законов, свидетельствует о живучести платонистского взгляда на математику. Умеренный скептический платонизм можно понимать как потенциальную убедительность, когда истинной считается теория, соответствующая чему-то существующему вне нас. Обоснование математики как систематической науки, охватывающей различные ветви естественной истории математики, должно использовать экстраординарные концепции. Их можно интерпретировать как комбинации обычных концепций, в которых при сохранении качественных различий имеется достаточно оснований для оправдания конкретных областей математики.

Целостность программы обоснования математики позволяет объяснить и познать во всей специфике то, что нельзя вывести исходя лишь из внешних признаков по отношению к исследуемой проблеме. Стремление к целостности неразрывно связано с идеей триадичности, которая позволяет в проблеме обоснования замкнуть бинарную оппозицию “формализм – интуиционизм” в системную триаду, объединяющую три равноправных элемента обоснования, а именно, “формализм – платонизм – интуиционизм”, каждый из которых позволяет участвовать в разрешении противоречий как специфическая “мера компромисса” во взаимодополнительных программах обоснования. Платонистская компонента в обосновании математики позволяет снять субъективные сомнения в абсолютности существования некоторых концептуально шатких определений сложно сконструированных множеств, без которых невозможен прогресс математики. Различные варианты платонизма опираются на аргументации в пользу реального существования мира математических идей.

Рациональный момент платонистской компоненты в системной триаде обоснования состоит в том, что она фиксирует связь фундаментальных математических понятий с категориальными представлениями о мире. Поскольку формализация допускает не вполне формализуемые теории, то целостность программы обоснования характеризует их лучше, чем полнота. Тринитарная методология не заменяет, а развивает диалектику, раскрывая ее новые возможности, когда от математики, при сохранении достаточной точности, требуется только лишь сохранять целостность исследуемых математических объектов. Признание прогресса при тринитарном подходе к обоснованию показало бы не только философскую проницательность, но и методологическую силу философских результатов. Если философскую

концепцию можно отвергнуть на чисто математических основаниях, развивая до пункта, где она входит в конфликт с имеющимся математическим опытом, то это подчеркивает важность и необходимость теоретических экспериментов в философии математики.

В концептуальном развитии актуальной проблемы обоснования математики используются идеи, содержащиеся в общей философской процедуре системного синтеза, с помощью которого можно синтезировать наиболее плодотворные направления обоснования математики, хотя сама эта процедура раньше не была разработана для формальных систем обоснования, близких к языку философского анализа. Общий вывод, вытекающий из проведенного исследования, состоит в новом понимании проблемы обоснования математики, состоящем в том, что, снимая неоправданные ограничения на принципы метатеории, определяемые исключительно в рамках математических критериев, и опираясь на более широкие гносеологические критерии можно утверждать, что в контексте философии триадичности возможности обоснования математики далеко еще не исчерпаны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обращение математиков к философии и методологии происходит в такие периоды, когда требует осмысления большой разнородный и часто методологически противоречивый накопленный математический материал. Для философов математики ориентиром в такой обосновательной деятельности может служить стабильность и историческая устойчивость тех областей математики, которые, несмотря на эволюцию философских взглядов на природу математики, указывают на истинные границы формальных математических теорий и дают тем самым рациональные аргументы для оправдания программ обоснования математики в ее конкретных разделах. Главная методологическая трудность всех имеющихся программ обоснования математики состоит в определении природы и границ “обосновательного слоя”, установившегося при разных методологических подходах к этой проблеме.

Однако, настаивая на едином языке оснований математики, мы навязываем математике чисто формальное единство. Итог исследований по основаниям математики прошлого столетия состоит в том, что или следует отказаться от построения программ обоснования вообще, или надо воспользоваться новой обосновательной методологией, с помощью которой можно попытаться некоторым образом реабилитировать актуальное бесконечное, имеющее непосредственное онтологическое обоснование через оправдание некоторой части трансфинитной математики. Таким образом, можно уйти от финитизма в программах обоснования, существенно расширяя тем самым возможности формалистского подхода, в русле которого развивается современная математика. Новые достижения в науке всегда осмысливаются в рамках уже существующих теорий, что обеспечивает теоретическую прочность новых концепций обоснования.

Конечной целью программ обоснования должен стать естественный синтез различных философско-мировоззренческих традиций применительно к философии математики, с целью создания единой широкой теоретико-методологической программы обоснования. Формирование новых принципов рационального осмысления математики влияет не только на статус абсолютно достоверного познания, но и на модели рационального роста научного знания. Ведущими математическими теориями XVII – первой половины XIX веков были различные исчисления, дальнейшее развитие которых приводило иногда к логическим противоречиям в основаниях математики. Разрешение этих трудностей было невозможно в рамках старых методологий и теорий, что и обусловило следующие тенденции в развитии математики: частичное обесценивание когнитивных регуляторов математического знания, расширение методологических границ в программах обоснования, ломка различных стереотипов и привычных форм взаимодействия с остальным знанием.

Исследования в области проблем обоснования математики преследуют важнейшие общенаучные цели. Так математический платонизм можно рассматривать как определенный альянс между философами и математиками с целью поиска методологических оснований интегративных процессов

современной философско-математической мысли. Математики всегда были сосредоточены на своей истории и эволюции математических понятий, обращая внимание на методы исследования, использовавшиеся в математике предшествующих уровней, и на создание таких формальных систем, в которых явно формулировались некоторые ранее неявно используемые операции. Такого рода онтологизацию математических объектов можно назвать “математическим платонизмом”. Философские теории, согласно которым системы, возникающие в реальном мире, являются реализациями общих Идей, как некоего царства платонических объектов или собрания априорных истин привлекательны для математиков. Прежде всего, тем, что математика для них достоверное знание, результаты которого обладают высокой степенью неопровержимости и истинности.

Сами платонистские идеи недоступны человеку, поскольку они бесконечно совершенны, поэтому они могут быть реализованы в человеке разными способами, иногда противоречащими друг другу, в чем, можно сказать, и проявляется человеческое несовершенство. Противоположные взгляды на природу математической реальности, становятся менее драматичными после их конкретизации с помощью математических примеров. Мировоззрение, которого придерживаются работающие математики, правильнее было назвать “умеренным скептическим платонизмом”, в отличие от “математического платонизма” не предполагающего, что математические понятия реально где-то существуют. Философские аргументы, апеллирующие исключительно к математическому платонизму без рассмотрения программ формализма и интуиционизма, в рамках которых реально развивается математика, мало помогают в методологическом анализе оснований математике.

Рациональные критерии обоснования играют важную роль в становлении математической строгости. В то же время отсутствие или неопределенность таких критериев не снижает уровня фактической значимости или строгости теории и не останавливают естественного прогресса неклассического математического знания. В истории математической науки встречаются и чисто негативные утверждения, и не всегда их роль была отрицательной. Поэтому рациональные критерии строгости не всегда контролировали строгость математики, однако границы иррационального современная математическая наука изучает инструментами рационального. Дихотомия “рациональное – иррациональное” служила важнейшим импульсом при создании грандиозных проектов обоснования математического познания.

Привычка обращаться с математическими объектами так, как будто это сущности реального мира, существующие независимо от работающих с ними математиков, является источником методологических затруднений в обосновании математических теорий. Поэтому совсем не случайным было появление интуиционистской точки зрения на проблему существования математических объектов, для которой главным объектом критики в теоретико-множественной математике стало понятие актуальной бесконечности. Преимущество логического доказательства состоит в том, что выводы

математических теорем не зависят от окружающей нас реальности и поэтому математические истины должны быть верны в любом описании рационального внешнего мира. Предмет математики, вопреки устоявшемуся философскому мнению, не сводится к предмету рефлексии, хотя благодаря ей и философскому размышлению о себе самой, математика познает то, что является теоретическим образом явлений природы.

Критический пересмотр широко распространенных в философской среде покровительственных воззрений на основания математики в пользу одной из программ обоснования математики можно уподобить кризису человеческой мысли, повторяющей старый аргумент. Поэтому полученные таким образом результаты в любом случае будут не вполне удовлетворительными, что позволяет сделать вывод о необходимости должной осмотрительности при решении этой проблемы. Во-первых, исследования в области оснований математики можно отнести к важнейшим общеметодологическим целям; во-вторых, философский взгляд на эту проблему объединяет различные разделы математики в целостную научную дисциплину; в-третьих, такие философско-методологические исследования не только расширяют горизонты математизации знания, но и раскрепощают само математическое мышление, делая его достаточно самостоятельным объектом философско-математического исследования.

Трудность выявления основных методологических принципов природы математического знания состоит в неразделенности субъекта и объекта. Философско-методологическое достижение Курта Гёделя состоит в соединении реалистических и идеалистических традиций в математике. Процесс решения математических проблем проходит через “точки покоя”, в которых в равной мере пребывают “тела в реальном мире” и “идеи в духовном мире”. Поэтому представляются вполне обоснованными попытки раскрытия места математики в обществе через ее общенаучные и социальные функции. Среди них основными являются: познавательная – получение нового знания, социально-практическая – применение научного знания, образовательная – передача знания и прогностическая – предвидение новых проблем.

Ограничительные теоремы Гёделя не могут служить аргументом в пользу той или иной философско-методологической программы обоснования математики. Хотя зависимость формалистской программы Гильберта от чисто философских предпосылок является гораздо меньшей, чем зависимость от них интуиционизма, затруднения в основаниях математики носят все же философский характер, поэтому выход из разногласий приходится искать вне математики. С точки зрения философской концепции дополненности, общее метаматематическое исследование расщепляется на математическое исследование и онтологическое исследование оснований математики. Дополненность в философии математики проявляется в том, что формулировка философских результатов относительно формализованных математических теорий производится в естественном языке, который дополняется специальной гносеологической и онтологической терминологией.

Система онтологических категорий является целостной в том смысле, что все эти категории описывают различные аспекты реальности. Однако, анализ программ обоснования математики показывает, что для понимания природы современной математики недостаточно исходить только из логики, онтологии или эпистемологии. В контексте ведущей линии развития философской компаративистики, формирование единого “пространства” философии математики не должно зависеть только от ограниченного фрагмента арифметики, чтобы признать понятие “математической истины” столь же легитимным, как это принято в полной арифметической системе. Кроме того, использование компьютеров, в современной вычислительной математике изменяет эпистемологические акценты в вопросе о непротиворечивости математики, которые приобретают уже локальное, а не глобальное звучание.

Поиски единства программ обоснования невозможно отделить от феномена многообразия знания, поэтому философы математики вынуждены рассматривать разнообразные пути объединения действующих программ. Среди таких путей, ведущих к единству можно выделить дихотомию – редукцию и дополнительность. Если редукция стремится свести все многообразие явлений к одной теоретической схеме, то дополнительность пытается сохранить многообразие при поиске объединяющих оснований, придав им общефилософскую интерпретацию. Для примирения противоположностей в дополнительных программах обоснования необходима соединяющая программа, способная замкнуть бинарную оппозицию в системную триаду. Сравнительная философия математики представляет собой более высокий уровень диалектико-синергетического развития философии математики, поскольку как метафилософия не только проверяет новые гипотезы, но и вселяет уверенность, которая необходима при получении нового математического знания.

Математические законы арифметики являются убедительными для нашего сознания не в силу практики счета, а из универсальных требований категориальной онтологии. Результаты Гёделя не накладывают ограничений на возможности подобного подхода к обоснованию математики. За формальными математическими системами стоят интуитивные принципы доказательства и убедительность, которую они добавляют к философскому анализу. Для достижения хорошего понимания формального доказательства непротиворечивости соответствующий философский анализ требовал больше усилий, чем первоначальное методологическое рассуждение. Поэтому главная проблема обоснования математики – нахождение разумного компромисса между возможностью достаточно хорошего охвата большей части современной математики и достижением хорошей философско-методологической эффективности новых подходов к обоснованию.

Работающие математики практически не сомневаются в том, что математика в целом непротиворечива, что является главным критерием математического существования по Гильберту. Одной из целей программы Гильберта было устранение абстрактных методов, так как предполагалось, что эти методы ненадежны или менее оправданы, чем элементарные методы. Если

смягчить доктринерские элементы программы Гильберта, то в теории доказательств потребуются не только результаты о непротиворечивости, но и новые подходы к расширению методологических принципов программ обоснования, способных объяснить естественность различий современных метаматематических исследований. Из невозможности обоснования непротиворечивости отдельных математических теорий не следует, что они противоречивы или проявят противоречивость в своем дальнейшем развитии. Гёделевские ограничительные результаты не могут служить аргументом в пользу какой-либо философской программы, поскольку из невозможности обоснования математики в рамках имеющихся программ никак не следует невозможность других философских подходов к обоснованию.

Хотя все еще нет окончательного философско-методологического понимания проблемы дополнительности в математическом знании, “метанаучные” аналоги с различными областями математики могут способствовать выявлению стратегических путей потенциального развития современной математики. Остающиеся в силе фундаментальные различия между понятийным и чувственным, алгебраическим и топологическим, дискретным и связным, конечным и бесконечным, формальным и реальным можно рассматривать как оппозиции в смысле “совпадения противоположностей”. История развития математики показала, что в споре интуиционизма и формализма не оказалось победителя, точнее интуиционистская и теоретико-множественная математика дополняют друг друга. Поиск третьего пути в этой дуальной связке будет приближением к пониманию целостности познающего и познаваемого, с учетом возможностей субъектов-исследователей.

Сами математики не наблюдают ни конфликта, ни необходимости выбора между различными взглядами на обоснование, поскольку математические объекты могут быть охарактеризованы в терминах методов, так как первые отличия при анализе различных направлений математики касаются, прежде всего, методов исследования. Философия математики в отличие от методологии математики не говорит о том, как открывать и как именно должен работать математик, но может внести понимание в проблему единства и целостности программы обоснования. Процесс такого объединения реально протекает внутри самой математики с учетом определенных исторических отклонений, поскольку ожидания, вытекающие из допущений программы Гильберта, были неявно опровергнуты общим математическим опытом. Историко-философский анализ философской системы обоснования математики указывает на ее взаимосвязь с предшествующими философскими традициями, несмотря на фундаментальные недостатки в классической философии математики.

Образ “нелинейной истины” в истории философии сложился задолго до того, как в философии математики проявилась спиралевидная парадигма синергетики. В математике он проявляется в виде реально возникающей “проблемы переусложненности”, связанной с необозримостью доказательств некоторых классических проблем, и проблемы использования компьютеров в доказательствах, что ставит под сомнение корректность математических

рассуждений в целом. Различие источников формирования принципиально нового философского подхода к проблеме обоснования математики указывает на необходимость системного синтеза, который позволяет из многих факторов выбрать нужные методологические основания для утверждения идеи синтеза философских систем. Борьба за такой синтез обеспечивает не только их жизнеспособность, но и полезность философии математики для самой математики.

ЛИТЕРАТУРА

Список использованных источников

1. Адамар, Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Ж.Адамар. – М.: Изд-во МЦНМО, 2001. – 128 с.
2. Александров, А.Д. Наука наших дней / А.Д.Александров // Академик Александр Данилович Александров. Воспоминания. Публикации. Материалы. – М.: Наука, 2002. – С. 321–332.
3. Алексеев, И.С. Концепция дополнительности: Историко-методологический анализ / И.С.Алексеев. – М.: Наука, 1978. – 277 с.
4. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В.Амелькин. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
5. Аносов, Д.В. Взгляд на математику и нечто из нее / Д.В.Аносов. – М.: Изд-во МЦНМО, 2000. – 32 с.
6. Аристотель. “Метафизика” / Аристотель. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1999. – 608 с.
7. Арепьев, Е. О методологии аналитической философии математики / Е.Арепьев // Вестник высшей школы. – 2003. – № 1. – С. 41–44.
8. Арнольд, В.И. О преподавании математики / В.И.Арнольд // УМН. – 1998. – Т. 53, Вып. 1. – С. 229–234.
9. Арнольд, В.И. Антинаучная революция и математика / В.И.Арнольд // Вестник РАН. – 1999. – Т. 69, № 6 – С. 553–558.
10. Архангельский, А.В. О сущности математики и фундаментальных математических структурах / А.В.Архангельский // История и методология естественных наук. Математика, механика. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – Вып. 32. – С. 14–29.
11. Бальтазар, Х. Паскаль / Х.Бальтазар // Логос. – Брюссель-Москва, 1992. – № 47. – С. 15–81.
12. Барабашев, А.Г. Будущее математики: Методологические аспекты прогнозирования / А.Г.Барабашев. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 160 с.
13. Баранцев, Р.Г. Синергетика в современном естествознании / Р.Г.Баранцев. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 144 с.
14. Баранцев, Р.Г. Становление тринитарного мышления / Р.Г.Баранцев. – Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2005. – 124 с.
15. Банах, С. Теория линейных операций / С.Банах. – Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 272 с.
16. Бейлинсон, А.А. Математические структуры и структура математики / А.А.Бейлинсон // Методологический анализ закономерностей развития математики. – М.: ВИНТИ, 1989. – С. 157–168.
17. Берков, В.Ф. Общая методология науки: Учебное пособие / В.Ф.Берков. – Мн.: Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 2001. – 227 с.
18. Бирюков, Б.В. Принятие решений: использование концептуальной “нежесткости” / Б.В.Бирюков, Д.И.Шапиро // Философские науки. – 1990. – № 10. – С. 101–108.

19. Бирюков, Б.В. Философско-логические основания математики в культурологическом аспекте: исторические судьбы древних контrovers точного мышления / Б.В.Бирюков, Л.Г.Бирюкова // Вестник МГУ. Сер.7. Философия. – 2001. – № 5. – С. 70–83.
20. Бирюков, Б.В. Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики / Б.В.Бирюков, В.Н.Тростников. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 232 с.
21. Блехман, И.И. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики / И.И.Блехман, А.Д.Мышкис, Я.Г.Пановко. – М.: Наука, 1983. – 328 с.
22. Болибрух, А.А. Проблемы Гильберта (100 лет спустя) / А.А.Болибрух. – М.: Изд-во МЦНМО, 1999. – 24 с.
23. Бор, Н. Избранные научные труды. В двух томах. Т. 2. / Н.Бор. – М.: Наука, 1971. – 675 с.
24. Брутян, Г.А. Методологические аспекты принципа дополнительности / Г.А.Брутян // Философские науки. – 1974. – № 5. – С. 31–38.
25. Бычков, С.Н. Диагональная процедура Г.Кантора и теория множеств / С.Н.Бычков, Е.А.Зайцев, Л.О.Шашкин // Историко-математические исследования. Вторая серия. – М.: Янус-К, 1999. – Вып. 4. – С. 303–324.
26. Ван, Хао. Процесс и существование в математике / Ван Хао // Математическая логика и ее применение. – М.: Мир, 1965. – С. 315 – 339.
27. Варпаховский, Ф.П. О решении десятой проблемы Гильберта / Ф.П.Варпаховский, А.Н.Колмогоров // Квант. – 1970. – № 7. – С. 39–44.
28. Вейль, Г. Дополнения / Г.Вейль // Прикладная комбинаторная математика: Сборник статей. – М.: Мир, 1968. – С. 309–360.
29. Вейль, Г. Структура математики / Г.Вейль // УМН. – 1976. – Т. 31, Вып. 4. – С. 220–237.
30. Вейль, Г. Давид Гильберт и его математические труды / Г.Вейль // Гильберт Д. Избранные труды. Том II. – М.: Изд-во “Факториал”, 1998. – С. 480–520.
31. Вейценбаум, Дж. Возможности вычислительных машин и человеческий разум: От суждений к вычислениям / Дж.Вейценбаум. – М.: Радио и связь, 1982. – 368 с.
32. Вигнер, Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках / Е.Вигнер // УФН. – 1968. – Т. 94, Вып. 3. – С. 535–546.
33. Визгин, Вл.П. Н. Бор о взаимосвязи физики и математики / Вл.П.Визгин // Нильс Бор и наука XX века: Сб. научных трудов. – Киев: Наукова думка, 1988. – С. 138–144.
34. Визгин, Вл.П. “Завоевание физики духом математики” и его отражение в художественной литературе / Вл.П.Визгин // Исследования по истории физики и механики. 1993–1994. – М.: Наука, 1997. – С. 102–112.
35. Визгин, Вл.П. “Догмат веры” физика-теоретика: “предустановленная гармония между чистой математикой и физикой” / Вл.П.Визгин // Проблема знания в истории науки и культуры. – СПб.: Алетейя, 2001. – С. 123–141.
36. Витгенштейн, Л. Философские работы. Часть 2. Кн. 1 / Л.Витгенштейн. – М.: Изд-во “Гнозис”, 1994. – 207 с.

37. Витушкин, А.Г. Полвека – как один день / А.Г.Витушкин // УМН. – 2002. – Т. 57, Вып. 1. – С. 191–206.
38. Владимиров, В.С. *P*-адический анализ и математическая физика / В.С.Владимиров, И.В.Волович, Е.И.Зеленов. – М.: Наука, 1994. – 352 с.
39. Войцехович, В.Э. Математическое познание: от гипотезы к теории / В.Э.Войцехович. – Мн.: Изд-во Университетское, 1984. – 142 с.
40. Гейтинг, А. Интуиционизм / А.Гейтинг. – М.: Мир, 1965. – 200 с.
41. Гивишвили, Г.В. Принцип дополнительности и эволюция природы / Г.В.Гивишвили // Вопросы философии. – 1997. – № 4. – С. 72–85.
42. Гильберт, Д. Избранные труды. Том I. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики / Д.Гильберт. – М.: Изд-во “Факториал”, 1998. – 575 с.
43. Гильберт, Д. Избранные труды. Том II. Анализ. Физика. Проблемы. *Personalia* / Д.Гильберт. – М.: Изд-во “Факториал”, 1998. – 608 с.
44. Гладкий, А.В. Введение в современную логику / А.В.Гладкий. – М.: Изд-во МЦНМО, 2001 – 200 с.
45. Голубева, О. Дополнительность и целостность в современном образовании / О.Голубева, А.Суханов // *Alma mater*. – 1997. – № 10. – С. 3–7.
46. Гоншорек, С.Н. Логика и методологический анализ принципа дополнительности / С.Н.Гоншорек // Принцип дополнительности и материалистическая диалектика. – М.: Наука, 1976. – С. 352–365.
47. Горенштейн, Д. Грандиозная теорема / Д.Горенштейн // В мире науки. – 1986. – № 2. – С. 62–74.
48. Гротендик, А. Урожай и посевы. Размышления о прошлом математика / А.Гротендик. – Ижевск: Удмуртский университет, 1999. – 288 с.
49. Демидов, С.С. “Проблемы” Д. Гильберта и математика XX века / С.С.Демидов // Математика и практика. Математика и культура. – М.: Самообразование, 2000. – С. 12–26.
50. Демидов, С.С. Контroversa “реализм – конструктивизм” и вопрос о прогрессе математики / С.С.Демидов // Проблема знания в истории науки и культуры. – СПб.: Изд-во “Алетейя”, 2001. – С. 142–154.
51. Демидов, С.С. Математические проблемы / С.С.Демидов, А.Н.Паршин // Гильберт Д. Избранные труды. Том II. – М.: Изд-во “Факториал”, 1998. – С. 580–591.
52. Декарт, Р. Сочинения в двух томах. Том 1 / Р.Декарт. – М.: Мысль, 1989. – 654 с.
53. Дильтей, В. Сущность философии / В.Дильтей. – М.: Изд-во “Интада”, 2001. – 160 с.
54. Доброхотова, Т.А. Асимметрия мозга и асимметрия сознания человека / Т.А.Доброхотова, Н.Н.Брагина // Вопросы философии. – 1993. – № 4. – С. 125–134.
55. Дойч, Д. Структура реальности / Д.Дойч. – Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 400 с.

56. Дорощев, Г.В. Язык преподавания математики и математический язык / Г.В.Дорощев // Современные проблемы методики преподавания математики. – М.: Просвещение, 1985. – С. 38–47.
57. Драгалин, А.Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств / А.Г.Драгалин. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
58. Дьедоне, Ж. О прогрессе математики / Ж.Дьедонне // Историко-математические исследования. Вып. 21. – М.: Наука, 1976. – С. 9–21.
59. Егоров, А.Д. Возникновение (Опыт построения парадигмы) / А.Д.Егоров, И.Д.Егоров. – М.: Физматлит, 2007. – 128 с.
60. Егоров, Ю.В. К теории обобщенных функций / Ю.В.Егоров // УМН. – 1990. – Т. 45, Вып. 5. – С. 3–40.
61. Еровенко, В.А. Тезис Аристотеля, или философско-математическое осмысление реальности / В.А.Еровенко // Математическое образование. – 2004. – № 4. – С. 56–63.
62. Еровенко, В. “Максима Канта” и общее математическое образование / В.Еровенко // Наука и инновации. – 2008. – № 1. – С. 9–12.
63. Ершов, Ю.Л. Некоторые вопросы применения формализованных языков для исследования философских проблем / Ю.Л.Ершов // Методологические проблемы математики. – Новосибирск: Наука, 1979. – С. 83–89.
64. Есенин-Вольпин, А.С. Об антитрадиционной (ультраинтуиционистской) программе оснований математики и естественнонаучном мышлении / А.С.Есенин-Вольпин // Вопросы философии. – 1996. – № 8. – С. 100–136.
65. Зенкин, А.А. Ошибка Георга Кантора / А.А.Зенкин // Вопросы философии. – 2000. – № 2. – С. 165–168.
66. Иванов, Е.М. Сознание и квантовые компьютеры / Е.М.Иванов // Философия науки. – 2000. – № 2. – С. 41–54.
67. Ильяшенко, Ю.С. Мемуар Дюлака “О предельных циклах” и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений / Ю.С.Ильяшенко // УМН. – 1985. – Т. 40, Вып. 6. – С. 41–78.
68. Исаев, П.С. Концептуальные основания квантовой теории поля / П.С.Исаев, Е.А.Мамчур // УФН. – 2000. – Т. 170, № 9. – С. 1025–1030.
69. Йех, Т.Дж. Об аксиоме выбора / Т.Дж.Йех // Справочная книга по математической логике: В четырех частях. Часть II. Теория множеств. – М.: Наука, 1982. – С. 35–63.
70. Каган, М.С. О системном подходе к системному подходу / М.С.Каган // Философские науки. – 1973. – № 6. – С. 34–42.
71. Каганов, М.И. Абстракция в математике и физике / М.И.Каганов, Г.Я.Любарский. – М.: Физматлит, 2005. – 352 с.
72. Кант, И. Критика чистого разума / И.Кант. – Симферополь: Реноме, 1998. – 528 с.
73. Кантор, Г. Труды по теории множеств / Г.Кантор. – М.: Наука, 1985. – 430 с.
74. Кантор, Г. Основы общего учения о многообразиях / Г.Кантор // Парадоксы бесконечного. – Мн.: Изд-во В.П.Ильин, 2000. – С. 301–365.

75. Карри, Х. Основания математической логики / Х.Карри. – М.: Мир, 1969. – 568 с.
76. Карпенко, А.С. Логика на рубеже тысячелетий / А.С.Карпенко // Логические исследования. Вып. 7. – М.: Наука, 2000. – С. 7–60.
77. Карпунин, В.А. Формальное и интуитивное в математическом познании / В.А.Карпунин. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. – 151 с.
78. Кассиди, Д.К. Гейзенберг, принцип неопределенности и квантовая революция / Д.К.Кассиди // В мире науки. – 1992. – № 7. – С. 62–69.
79. Кельберт, М. Что такое преобразование Фурье? / М.Кельберт // Математическое просвещение. Третья серия. – 2000. – Вып. 4. – С. 188–202.
80. Китчер, Ф. Математический натурализм / Ф.Китчер // Методологический анализ оснований математики. – М.: Наука, 1988. – С. 5–32.
81. Клайн, М. Математика. Утрата определенности / М.Клайн. – М.: Мир, 1984. – 446 с.
82. Кобзарев, И.Ю. Элементарные частицы. Диалоги физика и математика / И.Ю.Кобзарев, Ю.И.Манин. – М.: Изд-во “Фазис”, 1997. – VIII + 208 с.
83. Колесников, А.С. Философская компаративистика: Восток – Запад / А.С.Колесников. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2004. – 390 с.
84. Коллинз, Р. Социальная реальность объектов математики и естествознание / Р.Коллинз // Философия науки. – 2001. – № 2. – С. 3–23.
85. Колмогоров, А.Н. Научные основы школьного курса математики / А.Н.Колмогоров // Математика в школе. – 1969. – № 3. – С. 12–17.
86. Колмогоров, А.Н. Математика в ее историческом развитии / А.Н.Колмогоров. – М.: Наука, 1991. – 221 с.
87. Кочергин, А.Н. Машинное доказательство теорем как нетрадиционная исследовательская программа в математике / А.Н.Кочергин // Исследовательские программы в современной науке. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 70–89.
88. Коэн, П.Дж. Об основаниях теории множеств / П.Дж.Коэн // УМН. – 1974. – Т. 29, Вып. 5. – С. 169–176.
89. Коэн, П.Дж. Неканторовская теория множеств / П.Дж.Коэн, Р.Херш // Природа. – 1969. – № 4. – С. 43–55.
90. Крайзель, Г. Исследования по теории доказательств. Сборник статей / Г.Крайзель. – М.: Мир, 1981. – 289 с.
91. Крайзель, Г. Биография Курта Гёделя / Г.Крайзель // УМН. – 1988. – Т. 43, Вып. 2. – С. 175 – 216; Т. 43, Вып. 3. – С. 203–238.
92. Кудрявцев, Л.Д. Современная математика и ее преподавание / Л.Д.Кудрявцев. – М.: Наука, 1980. – 144 с.
93. Кужель, А.В. Современное понятие линии / А.В.Кужель // Математика сегодня’87. – Киев: Вища школа, 1987. – С. 8–24.
94. Кузичева, З.А. Некоторые проблемы истории обоснования математики / З.А.Кузичева // История и методология естественных наук. Вып. 11. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – С. 87–94.
95. Кузнецов, Б.Г. История философии для физиков и математиков. – 2-е изд. / Б.Г.Кузнецов. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 352 с.

96. Курант, Р. Что такое математика? – 3-е изд., испр. и доп. / Р.Курант, Г.Роббинс. – М.: МНЦМО, 2004. – 568 с.
97. Лавров, И.А. Программа Д. Гильберта построения аксиоматических теорий / И.А.Лавров // Математическая логика / И.А.Лавров. – М.: Академия, 2006. – С. 4–15.
98. Лакатос, И. Бесконечный регресс и основания математики / И.Лакатос // Современная философия науки: знание, рациональность, ценности в трудах мыслителей Запада. – М.: Логос, 1996. – С. 106–135.
99. Лейбниц, Г.В. Сочинения в четырех томах. Том 1 / Г.В.Лейбниц. – М.: Мысль, 1982. – 636 с.
100. Лукашевич, В.К. Анатомия научного метода: Учебное пособие / В.К.Лукашевич. – Мн.: Мисанта, 1999. – 96 с.
101. Лукьянец, В.С. Парадигмальный сдвиг в методологии обоснования современной математики / В.С.Лукьянец // Философские проблемы оснований физико-математического знания. – Киев: Наукова думка, 1989. – С. 47–76.
102. Любищев, А.А. Линии Демокрита и Платона в истории культуры / А.А.Любищев. – СПб.: Алетейя, 2000. – 256 с.
103. Ляпунов, А.А. О некоторых особенностях строения современного теоретического знания / А.А.Ляпунов // Вопросы философии. – 1966. – № 5. – С. 39–50.
104. Мак-Лейн, С. Математическая логика – ни основания, ни философия / С.Мак-Лейн // Методологический анализ оснований математики. – М.: Наука, 1988. – С. 148–153.
105. Мамардашвили, М.К. Классический и неклассический идеалы рациональности / М.К.Мамардашвили. – Тбилиси: Мецниереба, 1984. – 82 с.
106. Мамардашвили, М.К. Мой опыт нетипичен / М.К.Мамардашвили. – СПб.: Изд-во “Азбука”, 2000. – 400 с.
107. Манин, Ю.И. Доказуемое и недоказуемое / Ю.И.Манин. – М.: Советское радио, 1979. – 168 с.
108. Манин, Ю.И. Математика и физика / Ю.И.Манин. – М.: Знание, 1979. – 64 с.
109. Манин, Ю.И. Введение в теорию чисел / Ю.И.Манин, А.А.Панчишкин // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНТИ, 1990. – Т. 49. – С. 5–341.
110. Марков, А.А. Теория алгоритмов. – 2-е изд., испр. и доп. / А.А.Марков, Н.М. Нагорный. – М.: Фазис, 1996. – XLV + 448 с.
111. Матиясевич, Ю.В. Диофантовы множества / Ю.В.Матиясевич // УМН. – 1972. – Т. 27, Вып. 5. – С. 185–222.
112. Медведев, Ф.А. Доказательство как предмет историко-математического исследования / Ф.А.Медведев // Историко-математические исследования. Вып. 28. – М.: Наука, 1985. – С. 187–202.
113. Медведев, Ф.А. Канторовская теория множеств и теология / Ф.А.Медведев // Историко-математические исследования. Вып. 29. – М.: Наука, 1985. – С. 209–240.

114. Менский, М.Б. Квантовая модель мышления и эволюция / М.Б.Менский // Самоорганизация и наука: Опыт философского осмысления. – М.: ИФ РАН, 1994. – С. 207–227.
115. Монастырский, М.И. Математика на рубеже двух столетий / М.И.Монастырский // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 5. – 2000. – С. 56–70.
116. Монастырский, М.И. Современная математика в отблеске медалей Филдса / М.И.Монастырский. – М.: Янус-К, 2000. – 200 с.
117. Мороз, В.В. Философско-математический синтез: опыт историко-математической рефлексии / В.В.Мороз. – М.: Изд-во МГУ, 2005. – 307 с.
118. Нагорный, Н.М. К вопросу о непротиворечивости классической формальной арифметики / Н.М.Нагорный // Логические исследования. – М.: Наука, 2001. – Вып. 8. – С. 105–128.
119. Налимов, В.В. О некоторой параллели между принципом дополнительности Бора и метафорической структурой обыденного языка / В.В.Налимов // Принцип дополнительности и материалистическая диалектика. – М.: Наука, 1976. – С 121–123.
120. Налимов, В.В. Требование к изменению образа науки / В.В.Налимов // Проблема знания в истории науки и культуры. – СПб.: Изд-во “Алетейя”, 2001. – С. 6–26.
121. Нейман, Дж. Математик. / Дж.Нейман // Природа. – 1983. – № 2. – С. 88–95.
122. Непейвода, Н.Н. Становление понятия конструктивности в математике / Н.Н.Непейвода // Закономерности развития современной математики. – М.: Наука, 1987. – С. 219–229.
123. Непейвода, Н.Н. Прикладная логика: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. / Н.Н.Непейвода. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000. – 490 с.
124. Непейвода, Н.Н. Вызов логики и математики XX века и “ответ” на них цивилизации / Н.Н.Непейвода // Вопросы философии. – 2005. – № 8. – С. 118–128.
125. Новиков, С.П. Математическое образование в России: есть ли перспективы? / С.П.Новиков // ВИЕТ. – 1997. – № 1. – С. 97–106.
126. Осипов, А.И. Философия и методология науки: Учебное пособие для магистрантов, аспирантов, соискателей / А.И.Осипов. – Мн.: Ин-т подготовки научных кадров НАН Беларуси, 2007. – 243 с.
127. Павловский, Ю.Н. Математический и гуманитарный анализ механизма ядерного сдерживания / Ю.Н.Павловский // Вестник РАН. – 2000. – Т. 70, № 3. – С. 195–202.
128. Паршин, А.Н. Размышления над теоремой Гёделя / А.Н.Паршин // Вопросы философии. – 2000. – № 6. – С. 92–109.
129. Паршин, А.Н. Русская религиозная мысль: возрождение или консервация / А.Н.Паршин // Вопросы философии. – 2002. – № 4. – С. 50–59.
130. Паршин, А.Н. Путь. Математика и другие миры / А.Н.Паршин. – М.: Добросвет, 2002. – 240 с.

131. Паскаль, Б. Соображения относительно геометрии вообще. О геометрическом уме и искусстве убеждать / Б.Паскаль // Вопросы философии. – 1994. – № 6. – С. 125–143.
132. Пенроуз, Р. Новый ум короля: о компьютерах, мышлении и законах физики / Р.Пенроуз. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 384 с.
133. Пенроуз, Р. Тени разума: в поисках науки о сознании. Часть I / Р.Пенроуз. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2003. – 368 с.
134. Перловский, Л. Физические и метафизические концепции мышления / Л.Перловский // Звезда. – 1999. – № 8. – С. 188–207.
135. Перминов, В.Я. Неевклидовы геометрии и философия математики И.Канта / В.Я.Перминов // История и методология естественных наук. Математика, механика. Вып. 25. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – С. 23–33.
136. Перминов, В.Я. Развитие представлений о надежности математического доказательства / В.Я.Перминов. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 240 с.
137. Перминов, В.Я. Об аргументах Брауэра против закона исключенного третьего / В.Я.Перминов // Бесконечное в математике: философские и исторические аспекты. – М.: Янус-К, 1997. – С. 199–221.
138. Перминов, В.Я. Философия и основания математики / В.Я.Перминов. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.
139. Перминов, В.Я. Праксеологический априоризм и стратегия обоснования математики / В.Я.Перминов // Математика и опыт. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – С. 56–82.
140. Петров, Ю.П. История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика / Ю.П.Петров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 448 с.
141. Петров, Ю.П. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. – 4-е изд., перераб. и доп. / Ю.П.Петров, Л.Ю.Петров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 240 с.
142. Подниекс, К.М. Вокруг теоремы Гёделя / К.М.Подниекс. – Рига: Изд-во “Зинатне”, 1992. – 192 с.
143. Познер, А.Р. Метод дополненности: Проблема содержания и сферы действия / А.Р.Познер. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 200 с.
144. Поппер, К. Логика и рост научного знания: Избранные работы / К.Поппер. – М.: Прогресс, 1983. – 605 с.
145. Порус, В.Н. Принципы рациональной критики / В.Н.Порус // Философия науки. Вып. 2. – М.: Институт философии РАН, 1995. – С. 216–242.
146. Порус, В.Н. Альтернативы научного разума / В.Н.Порус // ВИЕТ. – 1998. – № 4. – С. 18–50.
147. Пуанкаре, А. О науке. – 2-е изд., стереотипное / А.Пуанкаре. – М.: Наука, 1990. – 736 с.
148. Розов, Н.С. Природа “упрямой реальности” в философии естествознания и математики / Н.С.Розов // Философские науки. – 2001. – № 2. – С. 24–36.

149. Садовничий, В.А. Математическое образование: настоящее и будущее / В.А.Садовничий // Вестник ВГУ. Серия “Проблемы высшего образования”. – 2001. – № 1. – С. 17–23.
150. Сачков, Ю.В. Научный метод: вопросы и развитие / Ю.В.Сачков. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 160 с.
151. Сингх, С. Великая теорема Ферма: История загадки, которая занимала лучшие умы мира на протяжении 358 лет / С.Сингх. – М.: Изд-во МЦНМО, 2000. – 288 с.
152. Смейл, С. Математические проблемы следующего столетия / С.Смейл // Современные проблемы хаоса и нелинейности. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2002. – С. 280–303.
153. Смирнова, Е.Д. Логика в философии и философия логики / Е.Д.Смирнова // Логические исследования. Вып. 7. – М.: Наука, 2000. – С. 217–231.
154. Сосинский, А.Б. Умер ли Никола Бурбаки? / А.Б.Сосинский // Математическое просвещение. Третья серия. – 1998. – Вып. 2. – С. 4–12.
155. Старжинский, В.П. Понятие “состояние” и его методологическая роль в физике / В.П.Старжинский. – Мн.: Наука и техника, 1979. – 88 с.
156. Такеути, Г. Теория доказательств / Г.Такеути. – М.: Мир, 1978. – 412 с.
157. Тихонов, А.Н. Рассказы о прикладной математике / А.Н.Тихонов, Д.П.Костомаров. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
158. Том, Р. Топология и лингвистика / Р.Том // УМН. – 1975. – Т. 30, Вып. 1. – С. 199–221.
159. Тростников, В.Н. Конструктивные процессы в математике (философский аспект) / В.Н.Тростников. – М.: Наука, 1975. – 255 с.
160. Тростников, В.Н. Математические высказывания св. Игнатия (Брянчанинова) / В.Н.Тростников // Математика и практика. Математика и культура. – М.: Самообразование, 2000. – С. 146–150.
161. Успенский, В.А. Семь размышлений на темы философии математики / В.А.Успенский // Закономерности развития современной математики. – М.: Наука, 1987. – С. 106–155.
162. Успенский, В.А. Что такое аксиоматический метод? / В.А.Успенский. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 96 с.
163. Фаддеев, Л.Д. Что такое современная математическая физика? / Л.Д.Фаддеев // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. – 1999. – Т. 226. – С. 7–10.
164. Фанг, Дж. Между философией и математикой: их параллелизм в “параллаксе” / Дж.Фанг // ВИЕТ. – 1992. – № 2. – С. 3–17.
165. Фейнберг, Е.Л. Эволюция методологии в XX веке / Е.Л.Фейнберг // Вопросы философии. – 1995. – № 7. – С. 38–44.
166. Фреге, Г. Основоположения арифметики: Логико-математическое исследование о понятии числа / Г.Фреге. – Томск: Водолей, 2000. – 128 с.
167. Хорган, Дж. Конец науки: Взгляд на ограниченность знания на закате Века Науки / Дж.Хорган. – СПб.: Амфора, 2001. – 479 с.

168. Хофштадтер, Д. Гёдель, Эшер, Бах: Эта бесконечная гирлянда / Д.Хофштадтер. – Самара: Издательский дом “Бахрах-М”, 2001. – 752 с.
169. Хютт, В.П. Концепция дополнительности и проблема объективности физического знания / В.П.Хютт. – Таллин: Изд-во “Валгус”, 1977. – 180 с.
170. Целищев, В.В. Поиски новой философии математики / В.В.Целищев // Философия науки. – 2001. – № 3. – С. 135–147.
171. Целищев, В.В. Непротиворечивость и полнота как нормы дедуктивного мышления в свете теоремы Гёделя о неполноте арифметики / В.В.Целищев // Философия науки. – 2005. – № 2. – С. 33–52.
172. Чейтин, Г.Дж. Пределы доказуемости / Г.Дж.Чейтин // В мире науки. – 2006. – № 69. – С. 38–45.
173. Шафаревич, И. О некоторых тенденциях развития математики / И.Шафаревич // Москва. – 1990. – № 12. – С. 3–5.
174. Шафаревич, И.Р. Математическое мышление и природа / И.Р.Шафаревич // ВИЕТ. – 1996. – № 1. – С. 78–84.
175. Шереметевский, В.П. Очерки по истории математики. – 3-е изд. / В.П.Шереметевский. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 184 с.
176. Эпштейн, М.Н. Философия возможного / М.Н.Эпштейн. – СПб.: Алетейя, 2001. – 334 с.
177. Юдин, Б.Г. Понятие целостности в структуре научного знания / Б.Г.Юдин // Вопросы философии. – 1970. – № 12. – С. 81–92.
178. Юшкевич, А.П. Математика и ее история в ретроспективе / А.П.Юшкевич // Закономерности развития современной математики – М.: Наука, 1987. – С. 28–74.
179. Яненко, Н.Н. Методологические проблемы математической физики / Н.Н.Яненко, Н.Г.Преображенский, О.С.Разумовский. – Новосибирск: Наука, 1986. – 196 с.
180. Янчевский, В. Защита информации. Алгебра в криптографии / В.Янчевский // Наука и инновации. – 2007. – № 9. – С. 33–37.
181. Яскевич, Я.С. Аргументация в науке / Я.С.Яскевич. – Минск: Изд-во Университетское, 1992. – 143 с.
182. Appel, K. Every planar map is four colorable / K.Appel, W.Haken // Illinois Journal of Mathematics. – 1977. – Vol. 21, № 3. – P. 429–567.
183. Davies, B Whither mathematics? / B.Davies // Notices of the American Mathematical Society. – 2005. – Vol. 52, № 11. – P. 1350–1356.
184. Detlefsen, M. On interpreting Godel second theorem / M.Detlefsen // Journal of Philosophical Logic. – 1979. – Vol. 8, № 3. – P. 297–313.
185. Gowers, W.T. A solution to the Schroeder-Bernstein problem for Banach spaces / W.T.Gowers // Bulletin of the London Mathematical Society. – 1996. – Vol. 28, № 3. – P. 297–304.
186. Hersh, R. Fresh breezes in the philosophy of mathematics / R.Hersh // American Mathematical Monthly. – 1995. – Vol. 102, № 7. – P. 589–594.
187. Kadvan, J. Reflections on the legacy of Kurt Godel: Mathematics, skepticism, postmodernism / J.Kadvany // Philosophical Forum. – 1989. – Vol. 20, № 3. – P. 161–181

188. Katz, J.J. What mathematical knowledge could be? / J.J.Katz // Mind. – 1995. – Vol. 104, № 418. – P. 491–522.

189. Wong, Hao On physicalism and algorithmism: Can machines think? / Hao Wong // Philosophia mathematica. Ser. 3. –1993. – Vol. 1, № 2. – P. 97–138.

190. Wiles, A. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem / A.Wiles // Annals of Mathematics. – 1995. – Vol. 142. – P. 443–551.

Список публикаций автора

1–А. Михайлова, Н.В. Философские взгляды Иммануила Канта на роль интуиции в научном познании / Н.В.Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Иммануил Кант: Тезисы докладов XV Международных чтений / БГУИР. – Мн., 1999. – С. 40–42.

2–А. Михайлова, Н.В. Культурно-исторические аспекты математического знания и образования / Н.В.Михайлова // Проблемы совершенствования методической подготовки учителей математики в условиях перехода на новые программы и учебники: Сборник материалов Республиканской научно-метод. конф. / БрГУ им. А.С. Пушкина. – Брест, 1999. – С. 35–40.

3–А. Михайлова, Н.В. Феномен бесконечного в многообразии математического знания / Н.В.Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2000. – № 2–3. – С. 78–83.

4–А. Михайлова, Н.В. М. Мамардашвили: философский анализ проблемы смысла науки / Н.В.Михайлова // Философы XX века: Мераб Мамардашвили: Материалы Республиканских чтений – 3 / РИВШ БГУ. – Мн., 2000. – С. 37–42.

5–А. Михайлова Н.В. К вопросу о математическом мифотворчестве в генезисе научного знания / Н.В.Михайлова // Формирование профессионализма учителя: проблемы, поиски решений на рубеже столетий: Материалы Международной научно-практ. конф. в 2 ч. Ч. 2 / БГВПК. – Барановичи, 2000. – С. 73–76.

6–А. Міхайлава, Н.В. Роля метафары ў філасофскім асэнсаванні матэматычнай творчасці / Н.В.Міхайлава // Народная асвета. – 2000. – № 8. – С. 154–159.

7–А. Михайлова, Н.В. О культурной функции научного знания и рационалистической вере во всемогущество разума / Н.В.Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Исаак Ньютон: Тезисы докладов XVI Международных чтений / БГУИР. – Мн., 2000. – С. 95–97.

8–А. Михайлова, Н.В. Философско-математическое знание с социально-образовательной точки зрения / Н.В.Михайлова // Вузовская наука, промышленность, международное сотрудничество: Материалы 3-й Международной научно-практ. конф. в 2 ч. Ч. 2 / БГУ. – Мн., 2000. — С. 85–91.

9–А. Михайлова, Н.В. Парадокс Менона в математическом познании / Н.В.Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2001. – № 3. – С. 85–95.

10–А. Михайлова, Н.В. Методологические проблемы теоретической математики: три философских аспекта / Н.В.Михайлова // Учебное знание как

- основа порождения культурных форм в университетском образовании: Материалы научно-практ. конф. / ЦПРО БГУ. – Мн., 2001. – С. 243–254.
- 11–А. Михайлова, Н.В. Картезианские темы в философии познания Блеза Паскаля / Н.В.Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2001. – № 4. – С. 18–22.
- 12–А. Михайлова, Н.В. Социокультурная обусловленность математического знания и образования / Н.В.Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Анри Пуанкаре: Тезисы докладов XVII Международных чтений / БГУИР. – Мн., 2001. – С. 174–177.
- 13–А. Михайлова, Н.В. Парадокс Менона в математическом образовании / Н.В.Михайлова // Педагогика. – 2001. – № 3. – С. 28–32.
- 14–А. Михайлова, Н.В. Проблема дополнительности в постнеклассической интерпретации математического знания / Н.В.Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Леонардо да Винчи: Тезисы докладов XVIII Международных чтений / БГУИР. – Мн., 2002. – С. 103–106.
- 15–А. Михайлова, Н.В. Картезианское понимание науки и конструктивная роль естественнонаучного образования / Н.В.Михайлова // Идея университета: парадоксы самоописания: Материалы третьей международной научно-практ. конф. / ЦПРО БГУ. – Мн., 2002. – С. 76–80.
- 16–А. Михайлова, Н.В. Рациональное и иррациональное мышление: проблемы философского осмысления / Н.В.Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2002. – № 4. – С. 118–127.
- 17–А. Михайлова, Н.В. Концепция дополнительности математических понятий и проблема нового знания / Н.В.Михайлова // Еругинские чтения – VIII: Тезисы докладов Международной математической конф. Ч. 2 / БрГУ им. А.С.Пушкина. – Брест, 2002. – С. 28–29.
- 18–А. Михайлова, Н.В. Рациональность математического знания и социокультурная стратегия познания / Н.В.Михайлова // Перспективы рациональности в XXI веке: Материалы конференции молодых ученых / Институт философии НАН Беларуси. – Мн., 2002. – С. 52–55.
- 19–А. Михайлова, Н.В. Стандарты строгости математических рассуждений и проблема вычислительной сложности / Н.В.Михайлова // Образовательные технологии в подготовке специалистов: Сборник научных статей в 5 ч. Ч. 4 / МГВРК. – Мн., 2003. – С. 64–70.
- 20–А. Михайлова, Н.В. Социокультурные проблемы формирования математического знания / Н.В.Михайлова // Народная асвета. – 2003. – № 2. – С. 3–5.
- 21–А. Михайлова, Н.В. Фундаменталистский и нефундаменталистский подходы в философии математики / Н.В.Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Блез Паскаль: Тезисы докладов XIX Международных чтений / БГУИР. – Мн., 2003. – С. 84–87.
- 22–А. Михайлова, Н.В. Эпистемологические проблемы современного математического знания / Н.В.Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2003. – № 1. – С. 124–129.

23–А. Михайлова, Н.В. Метод дополнительности и философский анализ современной математики / Н.В.Михайлова // Многоступенчатое университетское образование: от эффективного преподавания к эффективному учению / ЦПРО БГУ. – Мн.: Пропилеи, 2003. – С. 281–287.

24–А. Михайлова, Н.В. Теоремы Гёделя и программа Гильберта / Н.В.Михайлова // Еругинские чтения – IX: Тезисы докладов Международной математической конф. / ВГУ им. П.М.Машерова. – Витебск, 2003. – С. 209–210.

25–А. Михайлова, Н.В. Проблема двойственности науки: вычисление или рассуждение? / Н.В.Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2004. – № 2. – С. 80–88.

26–А. Михайлова, Н.В. Дуализм методологического подхода Гёделя и реалистические традиции математического образования / Н.В.Михайлова // Инженерно-педагогическое образование: проблемы и пути развития: Сборник научных статей в 2 ч. Ч. 2 / МГВРК. – Мн., 2004. – С. 179–184.

27–А. Михайлова, Н.В. Эволюция современного математического знания и пределы правоты сознания / Н.В.Михайлова // Народная асвета. – 2004. – № 8. – С. 8–10.

28–А. Михайлова, Н.В. О границе между интуитивным и формальным: иллюзия методологической целостности / Н.В.Михайлова // Философы XX века: Хосе Ортега-и-Гассет. Материалы Республиканских чтений – 9 / РИВШ БГУ. – Мн., 2004. – С. 56–59.

29–А. Михайлова, Н.В. Философско-методологические программы интуиционизма и формализма в математике / Н.В.Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Жорес Алфёров: Тезисы докладов XX Международных чтений / БГУИР. – Мн., 2004. – С. 158–161.

30–А. Михайлова, Н.В. Методология математики до и после программы Гильберта / Н.В.Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2005. – № 2-3. – С. 110–114.

31–А. Михайлова, Н.В. Тринитарный подход к оценочным суждениям о природе математического знания / Н.В.Михайлова // Актуальные проблемы радиоэлектроники: научные исследования, подготовка кадров: Сборник научных статей в 3 ч. Ч. 3 / МГВРК. – Мн., 2005. – С. 239–244.

32–А. Михайлова, Н.В. Фундаментальные двойственности математического знания и философско-методологический синтез / Н.В.Михайлова // Понтрягинские чтения – XVI: Тезисы докладов Воронежской весенней математической школы “Современные методы в теории краевых задач” / ВГУ. – Воронеж, 2005. – С. 109–110.

33–А. Михайлова, Н.В. Рационализм и иррационализм математического знания в контексте методологии образования / Н.В.Михайлова // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2005. – № 3. – С. 3–8.

34–А. Михайлова, Н.В. Постнеклассическое знание и методологические проблемы компьютерной математики / Н.В.Михайлова // Философы XX века: Вячеслав Степин: Материалы Республиканских чтений – 10 / РИВШ. – Мн., 2005. – С. 95–97.

35–А. Михайлова, Н.В. Мезомир науки и онтологические основания математики / Н.В.Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2005. – № 4. – С. 106–112.

36–А. Михайлова, Н.В. Проблема понимания математического знания: Кантор – Витгенштейн – Гедель / Н.В.Михайлова // Современные проблемы преподавания математики и информатики: Материалы Международной научной конференции, посвященной 100-летию академика С.М. Никольского. Ч. I / ММФ МГУ. – М., 2005. – С. 136–137.

37–А. Михайлова, Н.В. Проблема рационального конструирования фундаментальных математических структур / Н.В.Михайлова // Проблема конструктивности научного и философского знания: Сборник статей: Выпуск четвертый. – Курск: Изд-во КГУ, 2005. – С. 43–55.

38–А. Михайлова, Н.В. Философские проблемы обоснования научного знания в современной математике / Н.В.Михайлова // Вестник БГУ. Сер. 3. – 2006. – № 1. – С. 49–54.

39–А. Михайлова, Н.В. Принцип неполноты знания и проблема обоснования математики // Еругинские чтения – XI: Тезисы докладов Международной математической конф. / Институт математики НАН Беларуси. – Мн., 2006. – С. 166–167.

40–А. Михайлова, Н.В. Философско-методологические проблемы обоснования математики: к синтезу неформального и формального мышления / Н.В.Михайлова // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 1. – 2006. – № 1. – С. 32–35.

41–А. Михайлова, Н.В. Синтетичность математических истин и постгёделевские проблемы математики / Н.В.Михайлова // Проблема свободы личности и общества в социально-гуманитарном дискурсе: Материалы Всероссийской научной конф. / КГУ. – Курск, 2006. – С. 387–391.

42–А. Михайлова, Н.В. Гносеологические возможности математики / Н.В.Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2006. – № 2. – С. 26–29.

43–А. Михайлова, Н.В. Макс Планк и природа эффективности математики / Н.В.Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Макс Планк: Тезисы докладов XXI Международных чтений / БГУИР. – Мн., 2006. – С. 191–194.

44–А. Михайлова, Н. “Мысли без содержания пусты...”: Математический мир и сознание / Н.Михайлова // Беларуская думка. – 2006. – № 5. – С. 95–100.

45–А. Михайлова, Н.В. “Умеренный скептический платонизм” в системной триаде программ обоснования математики / Н.В.Михайлова // Проблема конструктивности научного и философского знания: Сборник статей: Выпуск шестой. – Курск: Изд-во КГУ, 2006. – С. 63–76.

46–А. Михайлова, Н.В. Естественный язык и язык математики в контексте идеи дополнительности / Н.В.Михайлова // Народная асвета. – 2006. – № 12. – С. 8–12.

47–А. Михайлова, Н.В. Системный анализ математических концепций и теорий обоснования / Н.В.Михайлова // Понтрягинские чтения – XVII: Тезисы докладов юбилейной XX Воронежской весенней математической школы

“Современные методы в теории краевых задач” / ВГУ. – Воронеж, 2006. – С. 115–116.

48–А. Михайлова, Н.В. Философский анализ методологических концепций Гейзенберга и Гёделя / Н.В.Михайлова // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 1. – 2006. – № 4. – С. 58–61.

49–А. Михайлова, Н.В. Синтезирующая триадическая структура программ обоснования математики / Н.В.Михайлова // Третьи Курдюмовские чтения “Идеи синергетики в естественных науках”: Материалы международной междисциплинарной научной конф. / ТГУ. – Тверь, 2007. – С. 355–359.

50–А. Михайлова, Н.В. Загадка “непостижимой эффективности математики” и математический платонизм / Н.В.Михайлова // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2007. – № 1. – С. 12–18.

51–А. Михайлова, Н.В. Философский и социальный аспекты инженерного образования / Н.В.Михайлова // Современная радиоэлектроника: научные исследования и подготовка кадров: Сборник материалов в 4 ч. Ч. 4 / МГВРК. – Мн., 2007. – С. 186–190.

52–А. Михайлова, Н.В. Психологические интенции тринитарного стиля философско-математического мышления / Н.В.Михайлова // Вышэйшая школа. – 2007. – № 2. – С. 38–42.

53–А. Михайлова, Н.В. Системный анализ как методологический подход в истории обоснования математики / Н.В.Михайлова // Леонард Эйлер и современная наука: Материалы международной конференции / Санкт-Петербургский научный центр РАН. – СПб., 2007. – С. 440–445.

54–А. Михайлова, Н.В. Философско-методологическое значение результатов Гёделя и структура математического мышления / Н.В.Михайлова // Вестник БГУ. Сер. 3. – 2007. – № 3. – С. 36–41.

55–А. Михайлова, Н.В. Метафизические аспекты обоснования и проблема переусложненности математики / Н.В.Михайлова // Понтрягинские чтения – XVIII: Тезисы докладов XXI Воронежской весенней математической школы “Современные методы в теории краевых задач” / ВГУ. – Воронеж, 2007. – С. 115–116.

56–А. Михайлова, Н.В. Теоретическая рефлексия математики в условиях возрастающей сложности науки / Н.В.Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2008. – № 1. – С. 161–166.

57–А. Михайлова, Н.В. Историко-методологическая проблема единства программ обоснования математики / Н.В.Михайлова // “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования”: посвящ. 85-летию Л.Д. Кудрявцева: Тезисы докладов 3-й Международной конференции / РУДН. – М., 2008. – С. 507–508.

58–А. Михайлова, Н.В. Математический платонизм и проблема внутренней непротиворечивости математики / Н.В.Михайлова // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 1. – 2008. – № 2. – С. 97–103.

59–А. Михайлова, Н.В. Реалистическая и антиреалистическая трактовка математического знания в познавательном синтезе / Н.В.Михайлова //

Образование, наука и культура в свете решения региональных проблем: материалы II Международной научно-практ. конф., Астрахань, 17–19 апреля 2008 г. / Астрахань: АИПКП, 2008. – С. 39–43.

60–А. Михайлова, Н.В. «Аргумент Беркли» в контексте методологического обоснования математического знания / Н.В.Михайлова // Университетское образование: опыт тысячелетия, проблемы, перспективы развития: тезисы докладов II Международного конгресса: в 2 т. / МГЛУ. – Минск, 2008. – Т. 2. – С. 70–71.