Определение и свойства дискретного преобразования Фурье

- *Дискретное преобразование Фурье, определение, свойства базисных функций.*
- *Дискретное преобразование Фурье, основные свойства: линейность, периодичность и комплексно-сопряженная симметрия коэффициентов.*
- *Дискретное преобразование Фурье, равенство Парсеваля, теорема о свертке и корреляции.*

В теме 1.2 рассматривались преобразовании (Фурье, Лапласа и z-преобразование) дискретной последовательности $S(k\Delta t)\ k=0,1,2,\dots$, результатами являлись соответствующие непрерывные функции $S_\Delta(\omega), L_\Delta(p)$ и $D_\Delta(z)$. Т.е., функция дискретного времени отображалась функциями непрерывных аргументов. Однако по идеологии цифровых методов как объекты, так и их отображения (преобразования) должны быть функциями только дискретных переменных. В связи с этим (главным образом, для создания вычислительных алгоритмов) была разработана теория дискретных преобразований последовательностей. Рассмотрим преобразование Фурье в дискретном варианте.

Известно, что всякую непрерывную периодическую функцию $x(t)=x(t+T)$ можно представить рядом Фурье:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{c}_n e^{j2\pi nt/T},\quad 0\le t\le T$$

$$\dot{c}_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi nt/T}dt,\quad n=0,\pm1,\pm2,..., \tag{0.1}$$

где в качестве ортогонального базиса используются непрерывные экспоненциальные функции, последовательность коэффициентов $\dot{c}_n$

определяет дискретный спектр функции $x(t)$, интервал между дискретами $\triangle f$ равен $\triangle f = 1/T$.

По аналогии с (0.1) введено дискретное преобразование Фурье (ДПФ) периодически повторяющейся дискретной последовательности. Это преобразование в нормализованной записи - для безразмерных переменных - имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{S}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(n) W^{-nk}, \quad k = 0,1,2,\ldots N-1; \\
&S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{S}(k) W^{nk}, \quad n = 0,1,2,\ldots N-1; \\
&W = \exp\left(j2\pi/N\right),
\end{aligned} \tag{0.2}$$

где $S(n)$ последовательность отсчетов сигнала;

$\dot{S}(k)$ последовательность спектральных коэффициентов (в общем случае комплексных).

Первую часть называют прямым ДПФ, вторую - обратным ДПФ (или ОДПФ) Здесь в качестве базисных используются дискретные экспоненциальные функции W^{nk} (базис ДЭФ). Все свойства представления (0.2) следуют из свойств базисных функций. Рассмотрим их.

а) Периодичность и комплексная сопряженность (см. рис.3.1)

$$W^{nk} = W^{(n+\ell N)(k+mN)}, \quad \ell, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$W^{nk} = W^{z}, \quad nk = \ell n + k, \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$W^{n} = \left(W^{-n}\right), \quad W^{nN} = 1;$$

$$\mathrm{mod}\, W^{nk} = \left|W^{nk}\right| = 1;$$

$$\arg W^{nk} = \frac{2\pi}{N} nk;$$

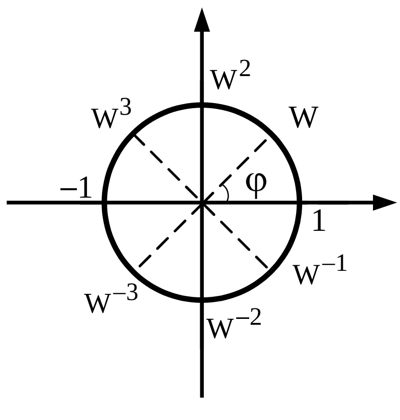

Рис 3.1.

б) ортогональность:

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{nk} W^{-nm} = \sum_{n=0}^{N-1} W^{n(k-m)} = \begin{cases} N, k = m \ (\mathrm{mod}\, N) \\ 0, k \neq m \ (\mathrm{mod}\, N); \end{cases}$$

здесь равенство $k = m \ (\mathrm{mod}\, N)$ означает: $k = \ell N + m, \ \ell = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Так как в (0.2) индексы ограничены, то условие ортогональности можно переписать:

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{nk} W^{-nm} = N\delta_{k,m}, \quad \delta_{k,m} = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \qquad (0.3)$$

Из определения (0.2) теперь можно получить основные свойства ДПФ. Они аналогичны свойствам интегрального преобразования Фурье.

1) обе последовательности в (0.2) являются периодическими функциями с периодом N:

$$\begin{matrix} \dot{S}(k) = \dot{S}(k + \ell N) \\ S(n) = S(n + \ell n) \end{matrix}, \quad \ell = 0, \pm1, \pm2, \ldots. \qquad (0.4)$$

2) если $N/2$ - целое число, то

$$\dot{S}\left(\frac{N}{2} + \ell\right) = \dot{S}^*\left(\frac{N}{2} - \ell\right), \quad \ell = 0, 1, \ldots, N/2;$$
$$\mathrm{Im}\, \dot{S}(N/2) = 0 \qquad (0.5)$$

Иными словами, для $N/2$ - целого достаточно в ДПФ (0.2) индекс k ограничить значением $N/2$;

3) строго выполняются равенства Парсеваля:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S^2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left|\dot{S}(k)\right|^2;$$
$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_1(n)S_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{S}_1(k)\dot{S}_2^*(k); \qquad (0.6)$$

4) теорема о свертках в варианте с ДПФ имеет вид

$$\text{если} \quad S(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_1(n)S_2(m-n),$$
$$\text{то} \quad \dot{S}(k) = \dot{S}_1(k)\dot{S}_2(k), \quad k, m = 0,1,\ldots,N-1; \qquad (0.7)$$

5) при сдвиге сигнала на оси времени имеет место равенство

$$S(k-m) \leftrightarrow \dot{S}_m(k) = W^{-km}\dot{S}(k), \quad m = 0,1,\ldots,N-1. \qquad (0.8)$$

Это свойство показывает, что сдвиг сигнала приводит к изменению только фазового спектра.