СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.

Тема 9

Функциональные ряды

Пусть $\{u_n(x)\}$ – некоторая функциональная последовательность, определенная на множестве X

Определение Выражение

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

называют ***функциональным рядом*** с областью определения X .

Функциональные ряды

Пусть точка x_0 – точка из области определения ряда, тогда при подстановки этой точки ряд превращается в обычный числовой ряд, который может либо сходиться, либо расходиться.

Определение. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, то точка x_0 называется точкой сходимости функционального ряда, а множество всех таких точек образует ***область сходимости*** ряда D.

Функциональные ряды

По аналогии с числовыми рядами функциональный ряд можно представить в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

где: $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ - ***частичная сумма ряда***,

а $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ..$ - ***частичный остаток ряда.***

Функциональные ряды

Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в некоторой области, то он сходится к **функции** :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$$

Функциональные ряды

<u>Определение.</u> Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится в некоторой области $D_a \subseteq D$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ***абсолютно сходящимся*** в этой области, а сама область $D_a \subseteq D$ называется ***областью абсолютной сходимости ряда.***

Функциональные ряды

<u>Определение.</u> Функциональный ряд называется **равномерно сходящимся** к сумме $S(x)$ на множестве D, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N,

<u>зависящий только от ε</u> и <u>не зависящий от x</u>, что для <u>всех частичных сумм</u>, номера которых больше N,

выполняется неравенство $|S_n(x_o) - S(x_o)| < \varepsilon$

(или $|r_n(x)| < \varepsilon$) для <u>всех x из D одновременно.</u>

Функциональные ряды

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда

Если для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ на множестве D существует мажорирующий сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

сходится на множестве D равномерно (т.е. формально: из неравенства

$$|u_n(x)| \leq a_n$$

для любого ***n*** и любого ***x*** и сходимости числового ряда следует равномерная сходимость функционального ряда на D).

Степенные ряды

Определение. ***Степенным рядом*** называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$+ c_n(x-x_0)^n + \ldots$$

при этом числа $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots \in R$ называются ***коэффициентами ряда***, а точка x_0 – ***центром разложения ряда.***

Степенные ряды

Общий член степенного ряда является простейшим многочленом:

$$u_n(x) = c_n(x - x_0)^n$$

Частичная сумма степенного ряда является многочленом степени ***n*** :

$$S_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n$$

Степенные ряды

Заменив $(x - x_0)$ на X всегда можно получить ряд ***степенной ряд*** вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n x^n = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 x + \tilde{c}_2 x^2 + \ldots + \tilde{c}_n x^n + \ldots$$

$$\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n, \ldots \in R$$

Степенной ряд всегда сходится по крайней мере в одной точке: $x = x_0$ (либо $x = 0$ для ряда второго вида).

Степенные ряды. Область сходимости.

Теорема Абеля. Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_0 .

Тогда он сходится в любой точке x , удовлетворяющей неравенству $|x| < |x_0|$ и ***сходится равномерно*** в области $|x| \le q < |x_0|$.

Если же ряд расходится в некоторой точке x_1,
то он расходится и во всех точках x , таких, что $|x| > |x_1|$.

Степенные ряды. Область сходимости.

Область сходимости степенных рядов имеет очень простую структуру (согласно теореме Абеля):

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ либо сходится на всей числовой прямой, либо существует такое число $R \geq 0$, что в интервале $X=(x_0-R,\, x_0+R)$ ряд сходится, а вне интервала – расходится.

Степенные ряды. Область сходимости.

Число ***R*** в этом случае называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ - ***интервалом сходимости*** этого ряда.

При $x = x_0 \pm R$ ряд может либо сходиться, либо расходиться. В этих точках получающиеся числовые ряды исследуются индивидуально.

Степенные ряды. Радиус сходимости

1. Пусть дан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$,

все коэффициенты которого отличны от нуля

$$c_n \neq 0, n \in N.$$

Тогда, если существует предел $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то он

совпадает с радиусом сходимости степенного ряда $\boldsymbol{R}$.

Степенные ряды. Радиус сходимости

2. Если же существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, то

радиус сходимости ***R*** равен значению –

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}$$

(формула Коши – Адамара).

Степенные ряды. Радиус сходимости

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n3^n (x-1)^n$$

Найдем радиус сходимости по формуле: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}\right| = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)}\right| = \frac{1}{3}.$$

Интервал сходимости этого ряда: .

$$(x_0 - R, x_0 + R) = (1-\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})$$

Степенные ряды. Радиус сходимости

Следует заметить, что формула для отыскания R

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

получена в предположении существования конечного

предела $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$,

т.е. в предположении, что ряд содержит все степени x . Если же степени x входят в ряд с пропусками, то непосредственное применение формулы невозможно.

Степенные ряды. Радиус сходимости

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^{2n-1}}{9^n n^5}$$

Найдем интервал и радиус сходимости, применив признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-6)^{2n+1}}{9^{n+1}(n+1)^5}}{\dfrac{(x-6)^{2n-1}}{9^n n^5}}\right| = \left|(x-6)^2\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^5}{9(n+1)^5}\right| =$$

$$= \frac{(x-6)^2}{9} < 1$$

Степенные ряды. Радиус сходимости

Неравенство $(x-6)^2 < 9$ равносильно

$$-3 < x-6 < 3 \Leftrightarrow 3 < x < 9$$

Исследуем ряд при $x = 3$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-6)^{2n-1}}{9^n n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{2n-1}}{9^n n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{3n^5}$$

и $x = 7$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9-6)^{2n-1}}{9^n n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3)^{2n-1}}{9^n n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^5}$$

Оба сходятся абсолютно и область сходимости - $[3,9]$,

радиус сходимости равен 3: $((9-3) = 2R, R = 3)$

Степенные ряды. Радиус сходимости

Применение формулы $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

для нахождение радиуса сходимости приведет к неправильному результату:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{9^n n^5}}{\dfrac{1}{9^{n+1}(n+1)^5}}\right| = 9\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^5}{n^5}\right| = 9 \qquad !!!!$$

Степенные ряды. Свойства суммы ряда.

Теорема (Свойства суммы степенного ряда)

Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ сходится в

интервале $X = (x_0 - R, x_0 + R)$, где $R \neq 0$.

Тогда сумма ряда $S(x)$:

непрерывна на интервале X,

интегрируема на любом отрезке, целиком лежащем в X,

дифференцируема любое число раз на интервале X.

Степенные ряды. Свойства суммы ряда.

Эти свойства суммы степенного ряда следуют из того, что степенной ряд согласно Теореме Абеля ***сходится равномерно*** в области $|x - x_0| \leq q < R$ и доказанных трех теоремах о свойствах равномерно сходящихся функциональных рядов:

теореме о почленном переходе к пределу,

теореме о почленном интегрировании ряда,

теореме о почленном дифференцировании ряда.

Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема о почленном дифференцировании ряда

Теорема. Пусть функции $u_1(x), u_2(x), \ldots$ определены в некоторой области X и имеют в этой области непрерывные производные $u_1'(x), u_2'(x), \ldots$. Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеет сумму $S(x)$, то исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно в X, $S(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и справедлива формула

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Нахождение суммы степенных рядов, используя свойства

Пример 3. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Ряд является геометрической прогрессией со знаменателем ***x***, сходится в интервале $X = (-1,1)$.

По формуле для суммы прогрессии находим сумму ряда:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Нахождение суммы степенных рядов, используя свойства

Пример 4. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

Ряд является результатом почленного дифференцирования предыдущего ряда:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^n\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

Поэтому по свойству суммы степенного ряда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Нахождение суммы степенных рядов, используя свойства

Пример 5. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n-1}$.

Преобразуем ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=xS(x)$$

$$\left(S(x)\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-t|\Big|_0^x=-\ln(1-x)\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=-x\ln(1-x)$$

Разложение функции в степенной ряд.

Пусть на интервале X функция $f(x)$ является суммой некоторого степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = f(x)$$

Тогда говорят, что на **интервале X функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд с центром в точке x_0 (или по степеням $x - x_0$).**

Вопрос о разложении функции в степенной ряд является одним из важных прикладных вопросов теории степенных рядов.

Необходимые условия разложимости функции в степенной ряд.

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

в некоторой окрестности X точки x_0, то его коэффициенты находятся по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots$$

- Т.е. $f(x)$ должна быть бесконечно дифференцируема в точке x_0.

Ряд Тейлора

Определение. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ с коэффициентами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots$$

называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0, независимо от того, сходится ли он вообще или сходится ли он к данной функции $f(x)$. Коэффициенты c_n называются коэффициентами Тейлора.

Достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные любого порядка ***n***, которые равномерно ограничены в этой окрестности, т.е. существует такое число $M > 0$, при котором $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$

для любого натурального ***n*** в любой точке $x \in X$. Тогда в этой окрестности функция разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Единственность разложения функции в ряд Тейлора.

Если функция $f(x)$ в разложима в ряд Тейлора, то это разложение единственно.