

**Разложение функции в
степенной ряд.**

**Ряды Тейлора. Использование
степенных рядов.**

Тема 9

Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \dots$$
$$+ c_n (x - x_0)^n + \dots$$

при этом числа $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots \in R$ называются **коэффициентами ряда**, а точка x_0 – **центром разложения ряда**.

Степенные ряды

Общий член степенного ряда является **простейшим
многочленом**:

$$u_n(x) = c_n (x - x_0)^n$$

Частичная сумма степенного ряда является **многочленом степени n** :

$$S_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n$$

Степенные ряды

Область сходимости степенных рядов имеет очень простую структуру (согласно теореме Абеля):

- Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ либо сходится на
- всей числовой прямой, либо существует такое число $R \geq 0$, что в интервале $X = (x_0 - R, x_0 + R)$ ряд сходится, а вне интервала – расходится.

Число R в этом случае называется **радиусом сходимости** степенного ряда, а интервал называется **интервалом сходимости** этого ряда.

Степенные ряды

Свойства суммы степенного ряда

Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ сходится в интервале $X = (x_0 - R, x_0 + R)$, где $R \neq 0$

Тогда сумма ряда $S(x)$:

- 1. непрерывна на интервале X ,
- 2. интегрируема на любом отрезке, целиком лежащем в X ,
- 3. дифференцируема любое число раз на интервале X .

Разложение функции в степенной ряд.

Пусть на интервале X функция $f(x)$ является суммой некоторого степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = f(x)$$

Тогда говорят, что на **интервале X функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд с центром в точке x_0 (или по степеням $x - x_0$)**.

Вопрос о разложении функции в степенной ряд является одним из важных прикладных вопросов теории степенных рядов.

Необходимые условия разложимости функции в степенной ряд.

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

в некоторой окрестности X точки x_0 , то его коэффициенты находятся по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

- Т.е. $f(x)$ должна быть бесконечно дифференцируема в точке x_0 .

Ряд Тейлора

Определение. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ с

коэффициентами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

называется **рядом Тейлора** для функции $f(x)$ в точке x_0 , независимо от того, сходится ли он вообще или сходится ли он к данной функции $f(x)$. Коэффициенты c_n

называются **коэффициентами Тэйлора**.

Достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные любого порядка n , которые равномерно ограничены в этой окрестности, т.е.

существует такое число $M > 0$, при котором $|f^{(n)}(x)| \leq M$

для любого натурального n в любой точке $x \in X$. Тогда в этой окрестности **функция разлагается в ряд Тейлора:**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Единственность разложения функции в ряд
Тейлора.

Если функция $f(x)$ в разложима в ряд
Тейлора, то это разложение **единственно**.

Ряд Маклорена

Определение. Если $x_0 = 0$ и коэффициенты

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

называется **рядом Маклорена** для функции $f(x)$.

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

1.
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$
2.
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$
3.
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

$$4. \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1;1]$$

$$5. \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1;1]$$

$$6. (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad x \in (-1;1)$$

Разложение в ряд Маклорена

Пример 1. Зная разложение в степенной ряд элементарных функций, разложить в ряд Маклорена следующие функции:

а. $f(x) = x \sin x$

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \dots$$

б. $f(x) = \cos x^3$

$$\cos x^3 = 1 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{18}}{6!} + \dots$$

Разложение в ряд Маклорена

в. $f(x) = \sin^2 x$

-можно найти коэффициенты ряда по определению, продифференцировав функцию $n+1$ раз;

-можно использовать равенство

$$f(x) = \sin^2 x = 1/2(1 - \cos 2x),$$

затем ряд для $\cos 2x$

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \dots$$

Разложение в ряд Маклорена

г. $f(x) = \arctg x$

- можно найти коэффициенты ряда по определению, продифференцировав функцию $n+1$ раз;

- можно использовать свойство суммы степенного ряда $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

$$f(x) = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Приложения степенных рядов

Степенные ряды используются для:

- 1) представления неэлементарных функций (например, неберущихся интегралов);
- 2) приближённого вычисления чисел, значений функций и определённых интегралов;
- 3) приближённого решения алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений.

Приложения степенных рядов

Пример 2. Представить в виде суммы ряда неэлементарную функцию

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Рассмотрим функцию

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad t \in (-\infty; +\infty)$$

тогда

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Приложения степенных рядов

- $$\begin{aligned} Si(x) &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^n \cdot \frac{t^{2n} dt}{(2n+1)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} dt \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)} \Big|_0^x = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, x \in (-\infty; +\infty) \end{aligned}$$

Приложения степенных рядов

Пример 3.

Вычислить приближённо число **e** с точностью **10^{-3}** .

Используем ряд Маклорена для e^x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

Откуда при $x=1$ получаем

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} + r_k$$

Найдём такой номер k , что $r_k < 10^{-3}$ и вычислим значение частичной суммы S_n .

Приложения степенных рядов

Пример 3.

Для нахождения номера k оценим остаток $r_k < 10^{-3}$

$$r_k = \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+3)!} + \dots =$$
$$\frac{1}{(k+1)!} \left(1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{\underbrace{(k+2)(k+3)}_{>(k+2)^2}} + \dots \right)$$

Приложения степенных рядов

Искомый номер находим, решая неравенство:

$$r_k < \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{k+2}{k+1} < 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{(k+1)!(k+1)}{k+2} > 1000$$

при $k=6$

$$\frac{7! \cdot 7}{8} = \frac{720 \cdot 49}{8} > 1000$$

$$e \approx \sum_{n=0}^6 \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{6!} \approx 2,718$$

Приложения степенных рядов

Пример 4. Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} y'' + xy = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Решением поставленной задачи является некоторая функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнению и начальным условиям.

Будем считать, что эта функция может быть представлена в виде степенного ряда: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Приложения степенных рядов

Из первого начального условия : $y(0) = 1$
следует, что $(y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n)$

$$1 = c_0 + c_1 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 + \dots \Rightarrow c_0 = 1$$

Из второго начального условия: $y'(0) = 0$
следует, что $(y'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot nx^{n-1})$

$$0 = c_1 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 + \dots \Rightarrow c_1 = 0$$

Приложения степенных рядов

Тогда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1) x^{n-2}$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение

$$y'' + xy = 0$$

Приложения степенных рядов

Тогда дифференциальное уравнение $y'' + xy = 0$ равносильно алгебраическому:

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1)x^{n-2} + x\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot x^n\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1)x^{n-2} + x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot x^{n+1} = 0$$

Приложения степенных рядов

Определим коэффициенты полученного уравнения, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях:

$$x^0: \quad 2 \cdot 1 \cdot c_2 + 0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$x^1: \quad 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 1 = 0 \Rightarrow c_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3!}$$

$$x^2: \quad 4 \cdot 3 \cdot c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

Приложения степенных рядов

$$c_5 = 0,$$

$$c_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{4}{6!}, \dots,$$

$$c_{3k} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n - 2)}{(3k)!},$$

$$c_n = 0, n \neq 3k.$$

Приложения степенных рядов

Таким образом, искомое решение задачи Коши является суммой следующего степенного ряда:

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \dots \cdot (3n - 2)}{(3n)!} \cdot x^{3n}$$